

APPUNTI DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Giulio Alfano

Anno Accademico 2004-2005

Indice

1	TRAVATURE PIANE	1
1.1	Geometria, equilibrio e vincoli	1
1.1.1	Piani di simmetria	2
1.1.2	Equilibrio di una trave	3
1.1.3	Vincoli esterni	4
1.1.4	Vincoli interni	7
1.2	Strutture labili, iperstatiche e isostatiche	10
1.2.1	Il problema dell'equilibrio	14
1.3	Calcolo delle reazioni vincolari	16
1.3.1	Travi ad un solo tratto	16
1.3.2	Travi soggette ad un carico trasversale distribuito	20
1.3.3	Travature a più tratti	22
1.4	Le caratteristiche della sollecitazione	26
1.4.1	Equazioni differenziali dell'equilibrio interno	31
1.4.2	Un esempio di soluzione analitica delle equazioni differenziali di equilibrio	33
1.4.3	Un'interpretazione della convenzione sul tracciamento del diagramma del momento	36
1.4.4	Condizioni al contorno	36
1.4.5	Esercizi sulle travi ad asse rettilineo orizzontale	43
1.5	Travature non ad asse rettilineo - Metodi grafici	65
1.5.1	Condizioni di equilibrio grafico	65
1.5.2	Applicazioni del metodo grafico ai telai piani isostatici	67
1.5.3	Segno delle caratteristiche della sollecitazione	78
1.6	Esercizi proposti	80
1.7	Cinematica della trave	93
1.8	Legame elastico lineare per il modello di trave piana di Eulero-Bernoulli	97
1.8.1	Distorsioni termiche	101
1.8.2	Sovrapposizione delle deformazioni elastiche e delle distorsioni	103
1.9	Il problema dell'equilibrio elastico per il modello di Eulero-Bernoulli	103
1.9.1	Esistenza ed unicità	105
1.9.2	Principio di sovrapposizione degli effetti	105
1.9.3	Integrazione delle equazioni della linea elastica: cenni al caso generale.	106
1.9.4	Integrazione delle equazioni della linea elastica: le travi isostatiche e gli schemi noti	106

1.10	Travi iperstatiche ad asse rettilineo	112
1.10.1	Problema 1	112
1.10.2	Problema 2	113
1.10.3	Problema 3	115
1.10.4	Problema 4	120
1.10.5	Problema 5	122
1.10.6	Problema 6	125
1.10.7	Problema 7: composizione cinematica delle rotazioni e degli spostamenti	125
1.10.8	Problema 8	129
1.11	Esercizi proposti	133
2	ELEMENTI DI MECCANICA DEL CONTINUO	137
2.1	Richiami di algebra ed analisi vettoriale	137
2.1.1	Spazi vettoriali e funzioni lineari	137
2.1.2	Vettori linearmente indipendenti	138
2.1.3	Funzioni lineari	138
2.1.4	Spazi di dimensione finita e basi	138
2.1.5	Lo spazio Euclideo tridimensionale	139
2.1.6	Basi ortonormali	140
2.1.7	Tensori e matrice associate ad un tensore	141
2.1.8	Prodotto fra tensori	143
2.1.9	Prodotto tensoriale	143
2.1.10	Cambiamento di base	144
2.1.11	Richiami di analisi tensoriale	146
2.2	Cinematica del modello continuo tridimensionale	150
2.2.1	Gradiente della deformazione	151
2.2.2	Deformazione di un intorno elementare	151
2.2.3	Dilatazione volumetrica	155
2.2.4	Spostamenti	156
2.2.5	Spostamenti dell'intorno elementare	157
2.2.6	Ipotesi di piccoli spostamenti	159
2.2.7	Tensore della deformazione infinitesima	160
2.2.8	Sintesi dei risultati per il caso di piccoli spostamenti	162
2.2.9	Deformazioni principali e direzioni principali	167
2.3	Statica del modello continuo tridimensionale	169
2.3.1	Equazioni differenziali di equilibrio	174
2.3.2	Simmetria del tensore delle tensioni	177
2.3.3	Condizioni ai limiti	178
2.3.4	Componenti normale e tangenziali del vettore tensione su una giacitura	178
2.3.5	Tensioni principali e direzioni principali di tensione	179
2.4	Cerchi di Mohr	181
2.4.1	I tre cerchi principali e l'arbelo di Mohr	187
2.5	Lavoro virtuale interno	189
2.6	Legame elastico	192

2.6.1	Espressioni matriciali del legame elastico	196
2.6.2	Energia elastica	197
2.6.3	Limiti di validità per le costanti elastiche	199
2.7	Criteri di resistenza	199
2.7.1	Criteri di resistenza per materiali duttili	201
2.7.2	Il criterio della curva intrinseca	206
3	IL PROBLEMA DEL DE SAINT VENANT	209
3.1	Il problema del De Saint Venant	209
3.1.1	Ipotesi della teoria del De Saint Venant	209
3.1.2	Stato tensionale sulla generica sezione retta	212
3.1.3	Equazioni di equilibrio interno	214
3.1.4	Condizioni di equilibrio sulla superficie laterale	215
3.1.5	Caratteristiche della sollecitazione	216
3.1.6	Postulato del De Saint Venant	219
3.2	Elementi di geometria delle aree	220
3.2.1	Momento statico	220
3.2.2	Baricentro	221
3.2.3	Tensore e momenti d'inerzia	221
3.2.4	Ellisse d'inerzia	229
3.2.5	Caratteristiche inerziali di alcune sezioni	231
3.2.6	Esercizi proposti	241
3.3	Sforzo normale e flessione	242
3.3.1	Sforzo normale centrato	246
3.3.2	Flessione retta	247
3.3.3	Flessione deviata	250
3.3.4	Sforzo normale eccentrico	252
3.3.5	Alcuni esempi	254
3.4	Torsione	260
3.4.1	Sezione circolare o a corona circolare	260
3.4.2	Cenni al caso generale e analogia idrodinamica	263
3.4.3	Sezione sottile biconnessa	264
3.5	Taglio	269
3.5.1	Trattazione di Jourawski	270

Capitolo 1

TRAVATURE PIANE

1.1 Geometria, equilibrio e vincoli

Molte delle strutture di interesse nel campo dell'ingegneria civile e meccanica nascono dall'assemblaggio di elementi 'trave', ciascuno dei quali è caratterizzato dall'aver una dimensione predominante rispetto alle altre due. Lo studio di tali elementi può svolgersi attraverso diversi tipi di modellazione matematica, la più conveniente delle quali dipende sempre dal problema in esame e dal tipo di informazioni che si vuole ottenere.

Per conoscere direttamente lo stato di deformazione e tensione in ogni punto della trave bisogna utilizzare un modello continuo tridimensionale. Dal punto di vista geometrico un modello tridimensionale di trave a sezione costante può ottenersi pensando ad una figura piana, detta 'sezione retta', 'sezione trasversale' o anche solo 'sezione', che si muove rigidamente nello spazio mantenendosi sempre ortogonale alla traiettoria seguita dal suo baricentro. La traiettoria definisce una curva dello spazio detta 'asse' della trave caratterizzata da una lunghezza e , in ogni punto, da un raggio di curvatura che si suppone siano sensibilmente maggiori delle dimensioni massime della sezione retta (figura 1.1.a).

Per lo studio di assemblaggi strutturali di più elementi trave, detti anche 'travature', è invece spesso conveniente 'in prima battuta' modellare matematicamente ciascuno di essi come un elemento monodimensionale definito geometricamente dall'asse della trave e , per ciascun punto di esso, da grandezze geometriche quali l'area e i momenti d'inerzia della sezione retta. Si vedrà che un tale tipo di modellazione fornisce in ogni punto dell'asse informazioni mediate sull'intera sezione, e che è possibile però in una seconda fase utilizzare una modellazione tridimensionale per rielaborare tali informazioni e ricavare, ad esempio, lo stato di deformazione e tensione in ogni punto di ogni sezione.

Per quanto lo studio delle travi curve sia di grande interesse nelle applicazioni, si pensi ad esempio agli archi, si limiterà qui l'attenzione al caso delle travi il cui asse è rettilineo nella configurazione indeformata (figura 1.1.b), assumendo come tale la configurazione assunta dalla trave in assenza di azioni esterne applicate.

Si farà inoltre quasi sempre la cosiddetta 'ipotesi di piccoli spostamenti', per la quale gli spostamenti dell'asse della trave si assumono sufficientemente piccoli da poter studiare il problema dell'equilibrio con riferimento sempre alla sua configurazione indeformata rettilinea. In altre parole e salvo avviso contrario si confonderà la configurazione

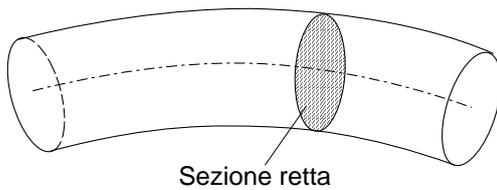


Figure 1.1.a: Trave ad asse curvo.

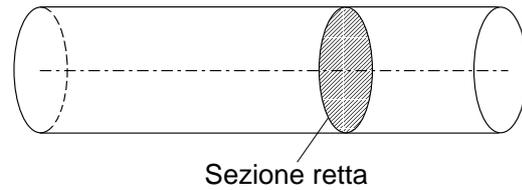


Figure 1.1.b: Trave ad asse rettilineo.

deformata con quella indeformata nella scrittura delle equazioni di equilibrio. L'ipotesi di piccoli spostamenti si traduce in un modello matematico estremamente semplificato che fornisce un'efficace schematizzazione della realtà quando le strutture in esame sono dotate di sufficiente rigidezza rispetto alle azioni esterne applicate e quando le azioni stesse non conducono a fenomeni di instabilità.

1.1.1 Piani di simmetria

Nella modellazione tridimensionale di molte travature esiste un piano di simmetria π sia geometrica che meccanica. La simmetria meccanica consiste nella presenza di proprietà del materiale e di condizioni di carico e di vincolo speculari rispetto a π ed è un concetto che viene presentato in questa fase della trattazione solo dal punto di vista intuitivo mediante lo schema di figura 1.2 rimandando, per una più chiara comprensione, alle definizioni di carichi, vincoli e proprietà del materiale che verranno date in seguito.

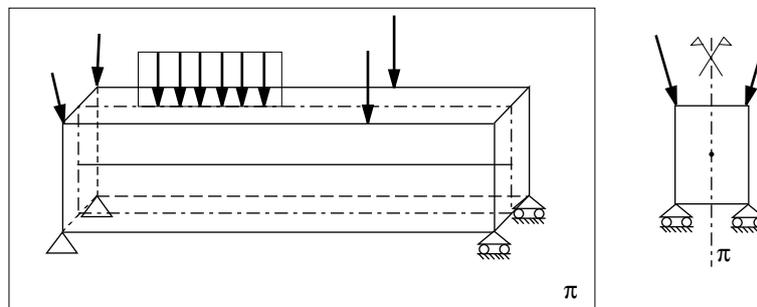


Figura 1.2: Piano di simmetria

Se esiste tale piano l'asse della trave, luogo dei baricentri delle sezioni rette, è sicuramente contenuto in esso. Sebbene non si sia ancora parlato di spostamenti, che riguardano l'aspetto cinematico del problema, né tantomeno si hanno elementi per analizzare relazioni di causa-effetto fra carichi, vincoli e spostamenti, si intuisce che in presenza di un piano di simmetria π gli spostamenti dell'asse della trave siano contenuti in π . In tal caso la modellazione monodimensionale di una travatura può semplificarsi adottando un modello piano e si parlerà di 'travature piane'.

Con riferimento ad un singolo elemento di una travatura piana si introduce un sistema di riferimento ortonormale $\{O, i, j, k\}$, in cui l'origine O degli assi coincide con

il baricentro di una delle sezioni di estremità, \mathbf{j} e \mathbf{k} sono i due versori degli assi y e z contenuti in π e disegnati in figura figura 1.3, mentre \mathbf{i} è ortogonale a π e di verso tale che la terna $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ risulti levogira. In particolare, l'asse z si assumerà coincidente con l'asse della trave.

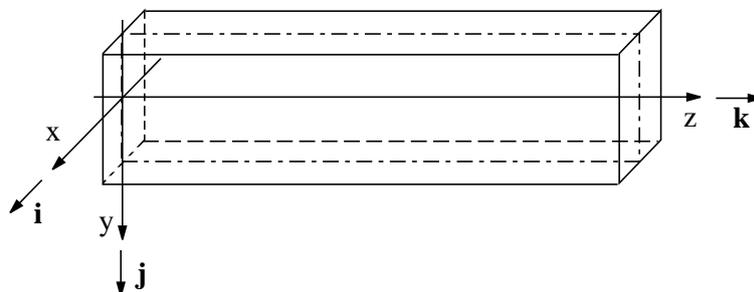


Figura 1.3: Sistema di riferimento

In un problema piano momenti (o coppie) e velocità di rotazione possono essere visti o come dei vettori ortogonali a π o, equivalentemente, attraverso la loro componente rispetto a x , ovvero la loro unica componente non nulla. Pertanto le componenti scalari \mathfrak{M} e $\dot{\phi}$ rispettivamente di un vettore coppia \mathbf{m} e di un vettore velocità di rotazione $\dot{\phi}$ si ottengono mediante i seguenti prodotti scalari¹:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathfrak{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{M} \quad \dot{\phi} \cdot \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\phi} \quad (1.1)$$

Ragionando direttamente nel piano π si immagina di osservare quest'ultimo dalla parte positiva dell'asse x . Pertanto coppie (o momenti) e velocità di rotazione si assumono positive se antiorarie.

1.1.2 Equilibrio di una trave

Si consideri la trave soggetta ad un sistema di forze \mathcal{F} costituito per semplicità solamente da forze concentrate \mathbf{F}_i e da coppie \mathfrak{M}_j , con $i = 1, \dots, N_f$ e $j = 1, \dots, N_m$, come mostrato in figura (figura 1.4).

La definizione di equilibrio viene data attraverso la scrittura delle 'equazioni cardinali della statica':

Definizione 1 Una trave soggetta ad un sistema di forze \mathcal{F} si dice in equilibrio se la risultante di \mathcal{F} ed il momento risultante di \mathcal{F} rispetto ad un polo arbitrario sono nulli.

¹Si ricorda che il prodotto scalare fra due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} , le cui rappresentazioni numeriche rispetto agli assi scelti sono $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^t$ e $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^t$, si ottiene come somma dei prodotti delle componenti omologhe:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

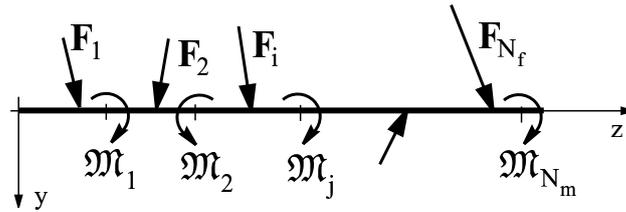


Figura 1.4: Equilibrio di una singola trave

Indicando dunque con \mathbf{F} la risultante di \mathcal{F} e con \mathfrak{M}_O il momento risultante rispetto all'origine O del riferimento, ricordando dalla Meccanica Razionale la loro definizione si ottiene la scrittura esplicita delle equazioni cardinali della statica:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N_f} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

$$\mathfrak{M}_O = \sum_{i=1}^{N_f} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \cdot \mathbf{i} + \sum_{j=1}^{N_m} \mathfrak{M}_j = 0$$

dove con \mathbf{r}_i si è indicato il vettore posizione del punto di applicazione della forza i -esima.

La prima delle (1.2) è un'equazione di tipo vettoriale e rappresenta la condizione di equilibrio alla traslazione. Proiettata sugli assi fornisce le due equazioni di equilibrio alla traslazione secondo le due direzioni y e z :

$$\sum_{i=1}^{N_f} F_{iy} = 0 \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^{N_f} F_{iz} = 0$$

La seconda delle (1.2) rappresenta invece l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno ad O ed in componenti si scrive:

$$\mathfrak{M}_O = \sum_{i=1}^{N_f} (y F_{iz} - z F_{iy}) + \sum_{j=1}^{N_m} \mathfrak{M}_j = 0 \quad (1.4)$$

Si ricorda peraltro che se è soddisfatto l'equilibrio alla traslazione, ovvero se è nulla la risultante \mathbf{F} , allora il momento risultante di \mathcal{F} è indipendente dal polo rispetto a cui è calcolato. In tal caso, quindi, se l'equilibrio alla rotazione è soddisfatto intorno ad O allora lo è anche intorno a qualsiasi altro punto del piano.

1.1.3 Vincoli esterni

Si consideri una travatura piana costituita da una o più travi schematizzate mediante la modellazione monodimensionale. Un punto di una trave rappresenta il baricentro di una

sezione retta ed è caratterizzato nel moto assoluto nel piano da tre parametri cinematici scalari, ovvero da una traslazione nel piano e da una rotazione. Se il valore di uno o più parametri è imposto a priori il punto si dice vincolato e si dice che in quel punto è stato imposto un ‘vincolo esterno’. Si considerano qui vincoli che non variano nel tempo per cui l'imposizione a priori del valore di un parametro cinematico equivale ad imporre nulla la sua variazione nel tempo, o velocità.

Alla caratterizzazione cinematica di un vincolo appena data ne corrisponde una di tipo statico nello spirito della dualità statico-cinematica. Infatti, se la variazione di un parametro è impedita ciò significa che esiste un ente statico che si oppone a tale possibile variazione con una reazione che è detta, appunto, reazione vincolare.

Si sottolinea che un vincolo può imporre un valore nullo o non nullo di un parametro di spostamento e, nel secondo caso, il valore imposto rappresenta un ‘cedimento’ del vincolo. Se il cedimento è indipendente dalla reazione vincolare il vincolo si dice infinitamente rigido ed il cedimento si dice di tipo ‘anelastico’. Il cedimento si dice invece ‘elastico’ quando esso è proporzionale e discorde al valore assunto della reazione. Il rapporto fra i moduli della reazione vincolare e del cedimento relativi ad un certo parametro cinematico fornisce la ‘rigidezza’ del vincolo.

Avendo fatto l'ipotesi che gli spostamenti siano piccoli si assume anche che eventuali cedimenti dei vincoli alterino la configurazione della travatura in modo trascurabile e che quindi, anche in presenza di cedimenti, si possa studiare l'equilibrio della struttura nella sua configurazione indeformata piuttosto che, come si dovrebbe a rigore fare, nella sua configurazione deformata. Con tale ipotesi, dunque, la presenza di cedimenti non gioca alcun ruolo in questa fase in cui si studia esclusivamente il problema dell'equilibrio.

Altre tre ipotesi che si faranno sono quelle di vincoli lisci, bilaterali ed infinitamente resistenti. In virtù della prima di queste ogni reazione vincolare compie potenza virtuale nulla per gli atti di moto consentiti dal vincolo escludendo, pertanto, fenomeni di attrito; quella di vincoli bilaterali implica che la variazione di un parametro cinematico vincolato è impedita in entrambi i versi; quella di vincoli infinitamente resistenti comporta che ogni vincolo è capace di esplicare la sua azione qualsiasi sia il valore della reazione vincolare stessa².

Un vincolo si dice ‘semplice’ quando impedisce la variazione di un solo parametro cinematico scalare, ‘doppio’ quando ne impedisce due, ‘triplo’ quando blocca tutti e tre i parametri. La simbologia adottata per i vincoli è descritta nelle figure 1.5-1.7.

Un ‘carrello’, detto anche ‘appoggio scorrevole’ (o equivalentemente³ un ‘pendolino’ infinitamente rigido), blocca il valore della sola componente della velocità di traslazione del punto in direzione ortogonale al piano di scorrimento del carrello (parallela a quella del pendolino). Esso è dunque un ‘vincolo semplice’. Un ‘doppio doppio pendolo’ impedisce la sola velocità di rotazione e dunque è anch'esso un vincolo semplice.

²Si noti che le ipotesi di vincoli di vincoli lisci, bilaterali ed infinitamente resistenti sono estremamente utili per semplificare il modello matematico ma la loro aderenza al problema fisico va attentamente verificata caso per caso

³Non c'è alcuna ragione concettuale per la quale si usano a volte simbologie e nomi diversi per indicare lo stesso tipo di vincolo. Si preferisce qui indicare più notazioni per consentire una più facile consultazione di altri testi.

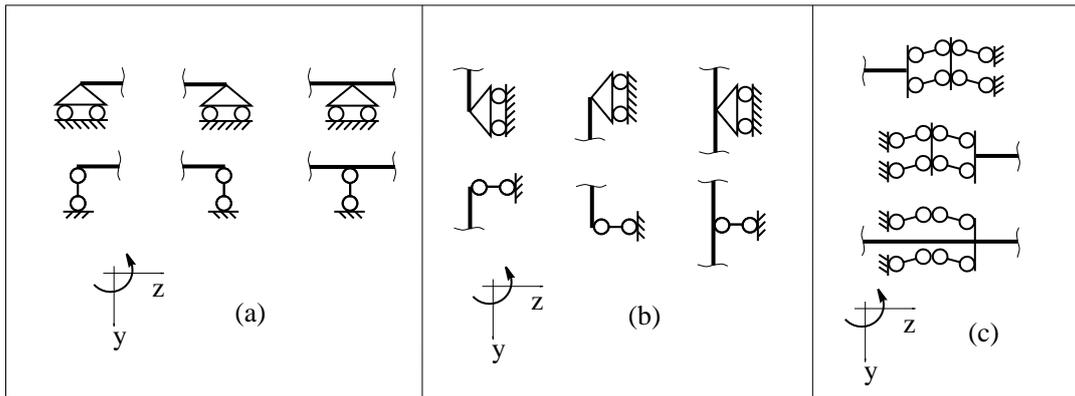


Figura 1.5: Vincoli esterni semplici. (a) ‘carrello’ (o ‘appoggio scorrevole’) o pendolino in direzione y : $\dot{v}_y = 0$; (b) ‘carrello’ (o ‘appoggio scorrevole’) o pendolino in direzione z : $\dot{v}_z = 0$; (c) ‘doppio doppio pendolo’: $\dot{\phi} = 0$.

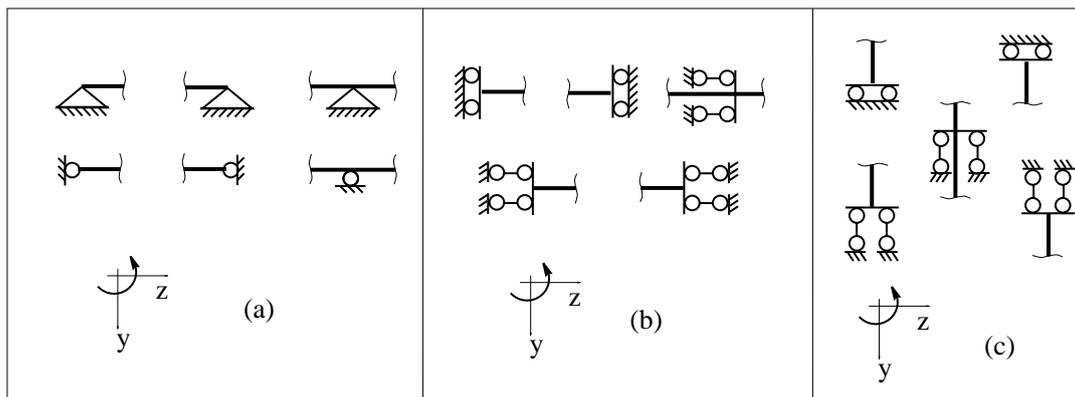


Figura 1.6: Vincoli esterni doppi. (a) ‘appoggio’ o ‘cerniera esterna’: $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$; (b) ‘doppio pendolo’ in direzione z : $\dot{v}_z = 0$ e $\dot{\phi} = 0$; (c) ‘doppio pendolo’ in direzione y : $\dot{v}_y = 0$ e $\dot{\phi} = 0$.



Figura 1.7: Vincolo esterno triplo (incastro): $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ e $\dot{\phi} = 0$.

Un ‘appoggio fisso’ (o equivalentemente una ‘cerniera esterna’) è un vincolo ‘doppio’ che impedisce entrambe le componenti di velocità di traslazione. Analogamente un ‘doppio pendolo’ (o equivalentemente un ‘pattino’) impedisce sia la velocità di ro-

tazione che quella di traslazione nella direzione dei pendoli (ortogonale ai piatti del pattino).

L' 'incastro' rappresenta invece un vincolo triplo e blocca sia la velocità di rotazione che entrambe le componenti della velocità di traslazione.

E' ovvio che un vincolo doppio può sempre ottenersi mediante la composizione di due vincoli semplici, e che l'incastro può ottenersi mediante la composizione di tre vincoli semplici (ad esempio due carrelli ed un doppio pendolo).

Da un punto di vista statico la retta d'azione della reazione di un carrello passa per il punto di appoggio ed è ortogonale al piano di scorrimento del carrello. Equivalentemente la retta d'azione della reazione di un pendolino concide con l'asse del pendolino stesso. Un doppio pendolo reagisce invece solo con una coppia, ed includendo nell'insieme dei punti del piano anche i punti impropri la sua retta d'azione concide con la retta impropria, luogo dei punti impropri. Si deduce da quanto detto che la retta d'azione della reazione di un vincolo semplice è sempre univocamente determinata (figura 1.8).

La retta d'azione della reazione di una cerniera esterna (di un appoggio fisso) è invece una delle infinite rette della stella di rette passanti per il baricentro della cerniera (per il punto di appoggio). Pertanto la reazione può sempre decomporsi nella somma di due componenti secondo due direzioni non parallele. La retta d'azione di un doppio pendolo (di un pattino) è una delle infinite rette parallele alla direzione dei pendoli (ortogonale ai piatti del pattino). La reazione può allora decomporsi nella somma di una forza avente la direzione dei pendoli e di una coppia. Quindi un vincolo esterno doppio non definisce univocamente la retta d'azione della reazione ma impone ad essa di passare per un punto del piano. Tale punto è proprio nel caso della cerniera esterna (di un appoggio fisso), ed improprio nel caso del doppio pendolo (del pattino) (figura 1.9).

La reazione di un incastro (vincolo triplo) può invece avere come retta d'azione una qualsiasi retta del piano. La reazione può allora decomporsi nella somma di due forze in direzioni non parallele tra loro e di una coppia (figura 1.10).

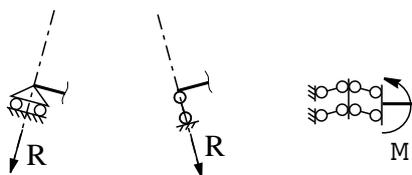


Figura 1.8: Reazioni esplicate dai vincoli semplici.

1.1.4 Vincoli interni

Un vincolo interno tra due punti A e B della travatura definisce a priori il valore della differenza tra i valori assunti in A e in B da uno o più parametri cinematici. Tutto quanto detto per i vincoli esterni vale anche per quelli interni se si sostituisce, dal punto di vista cinematico, al concetto di moto assoluto quello di moto relativo tra i punti A e B e, dal punto di vista statico, al concetto di reazione vincolare quello di interazione tra i punti

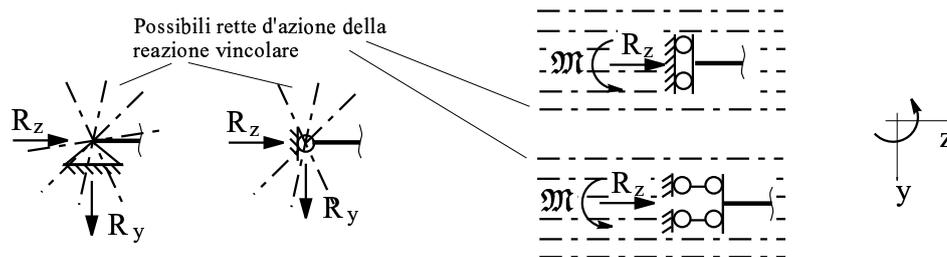


Figura 1.9: Reazioni esplicitate dai vincoli doppi.

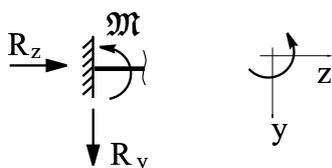


Figura 1.10: Reazioni esplicitate dall'incastro.

A e B . Tale interazione rispetta il principio di azione e reazione per cui essa è costituita da una reazione di A su B e di una uguale in modulo e contraria in verso di B su A .

Vincoli interni semplici tra due punti A e B sono il 'pendolino interno', che impedisce la velocità relativa tra A e B , $\Delta\dot{v}_p$ in direzione parallela a quella del suo asse p , ed il 'doppio doppio pendolo interno', che impedisce la velocità di rotazione relativa $\Delta\dot{\phi}_{AB}$.

Vincoli interni doppi sono invece la 'cerniera', che impedisce la velocità relativa $\Delta\dot{v}_{AB}$, ovvero entrambe le sue due componenti secondo due qualsiasi direzioni non parallele, ed il 'doppio pendolo interno' (o equivalentemente 'pattino interno'), che impedisce sia la velocità relativa in direzione parallela agli assi del doppio pendolo (ortogonale ai piatti del pattino) che la velocità di rotazione relativa $\Delta\dot{\phi}_{AB}$.

Il vincolo triplo interno è il vincolo di continuità cinematica. Esso impedisce sia le due componenti della velocità relativa, ovvero il vettore $\Delta\dot{v}_{AB}$, sia la velocità di rotazione relativa $\Delta\dot{\phi}_{AB}$.

Come per i vincoli esterni è ovvio che un vincolo interno doppio può sempre ottenersi mediante la composizione di due vincoli interni semplici, e che il vincolo di continuità può ottenersi mediante la composizione di tre vincoli interni semplici.

Da un punto di vista statico l'interazione trasmessa da un pendolino è costituita da due reazioni uguali e contrarie, \mathbf{R}_{AB} di A su B e \mathbf{R}_{BA} di B su A , aventi come retta d'azione l'asse p del pendolino, mentre quella trasmessa dal doppio doppio pendolo interno è data da due coppie reattive uguali e contrarie \mathfrak{M}_{AB} di A su B e \mathfrak{M}_{BA} di B su A . Se si includono i punti impropri nel piano la retta d'azione di una coppia è la retta impropria, ovvero luogo di tutti i punti impropri del piano. Pertanto, analogamente a quanto accade per i vincoli esterni semplici, i vincoli interni semplici definiscono univocamente la retta d'azione delle due reazioni mutue trasmesse dal vincolo (figura 1.11).

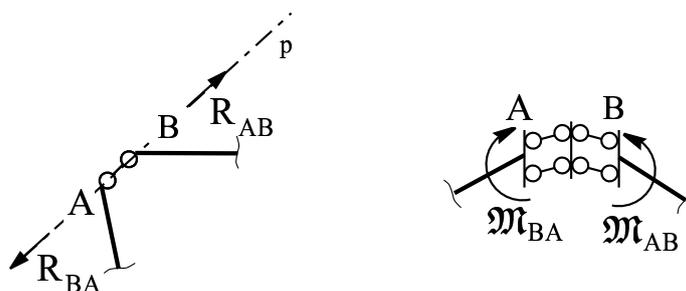


Figura 1.11: Vincoli interni semplici.

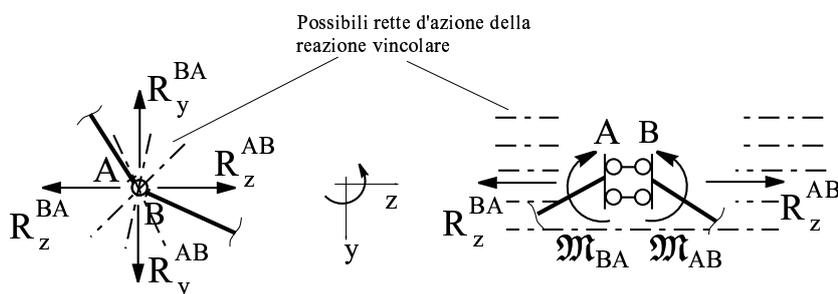


Figura 1.12: Vincoli interni doppi.

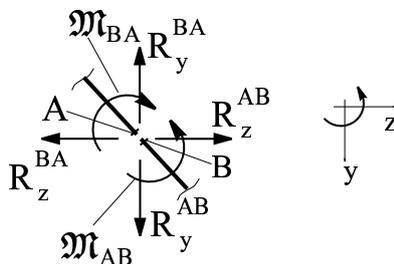


Figura 1.13: Vincolo interno interno triplo.

L'interazione trasmessa dalla cerniera è costituita da due reazioni uguali e contrarie aventi come retta d'azione una qualsiasi della stella di rette passanti per il centro della cerniera. Ognuna di tali reazioni può dunque decomporre in due componenti secondo, ad esempio, le direzioni y e z degli assi in figura. L'interazione trasmessa dal doppio pendolo interno è costituita da due reazioni uguali e contrarie nella direzione degli assi del doppio pendolo e da due coppie uguali e contrarie. Componendo insieme tali reazioni, ognuna delle reazioni mutue trasmesse dal vincolo può avere come risultante una qualsiasi forza agente su una qualsiasi retta parallela agli assi del doppio pendolo. In definitiva, un vincolo interno doppio non definisce univocamente la retta d'azione dell'interazione ma impone ad essa di passare per un punto del piano. Tale punto è proprio

nel caso della cerniera, ed improprio nel caso del doppio pendolo (figura 1.12).

L'interazione trasmessa dal vincolo interno triplo può avere come retta d'azione una qualsiasi retta d'azione nel piano. Ognuna delle due reazioni, uguali e contrarie fra loro, che costituiscono tale interazione può dunque decomporre nella somma di due forze non parallele passanti per il punto di continuità e di una coppia (figura 1.13). E' utile sottolineare che un vincolo interno triplo esiste in ogni punto di continuità della trave e che le interazioni vengono spesso decomposte nelle due componenti rispettivamente parallela e ortogonale all'asse ed in una coppia. Tali componenti costituiscono le 'caratteristiche della sollecitazione interna' e verranno ampiamente studiate nel seguito.

1.2 Strutture labili, iperstatiche e isostatiche

Si consideri una travatura costituita da t tratti continui. Ognuno dei tratti sia costituito da uno o più elementi trave assemblati insieme e si faccia l'ipotesi che la linea d'asse di ogni tratto, intesa come l'unione degli assi delle travi che lo costituiscono, sia monoconnessa (figura 1.14). Si esclude dunque in questa fase il caso di tratti che presentino maglie chiuse continue, cioè tratti pluriconnessi (figura 1.15).

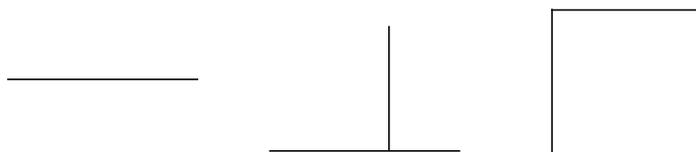


Figura 1.14: Esempi di tratti monoconnessi.



Figura 1.15: Esempi di tratti pluriconnessi, cioè caratterizzati dalla presenza di maglie chiuse continue.

In assenza di vincoli esterni ed interni ognuno dei tratti è caratterizzato da 3 possibili atti di moto rigido indipendenti e si dice dunque che ha 3 gradi di libertà nel piano. Dunque il numero di gradi di libertà della struttura, ovvero di possibili atti di moto indipendenti per i quali l'atto di moto di ogni tratto continuo è rigido, è pari a $3t$. Tale numero è anche detto 'grado di labilità' ed indicato con l .

Si immagini ora di aggiungere un numero s di vincoli semplici, che possono essere in generale interni o esterni. In tale conteggio un vincolo semplice vale 1, un doppio vale 2 ed uno triplo vale 3, e questo sia per i vincoli interni che per quelli esterni. Ogni vincolo semplice, da solo, elimina un grado di libertà della struttura. Se si aggiungono

però i vincoli in sequenza, mentre il primo sicuramente eliminerà un grado di libertà, a partire dal secondo ognuno di vincoli aggiunti può eliminare o può non eliminare un ulteriore grado di libertà. Nel primo caso il vincolo si definisce ‘efficace’ mentre nel secondo esso è ‘inefficace’⁴. Si indichi con s_{ef} il numero dei vincoli efficaci e con s_{in} quello dei vincoli inefficaci. Si può dimostrare che i due numeri s_{ef} ed s_{in} sono indipendenti dalla sequenza con cui si inseriscono i vincoli, sebbene la caratterizzazione di ciascuno di essi come efficace o inefficace dipenda invece da tale sequenza. Il numero di vincoli inefficaci s_{in} è tipicamente indicato come ‘grado di iperstaticità’ della struttura ed indicato con i . Quando $i > 0$ una travatura viene detta ‘staticamente indeterminata’ mentre quando $i = 0$ essa è detta ‘staticamente determinata’. Il motivo di tale notazione verrà chiarito dal seguito.

Il grado di labilità della struttura vincolata risulta pari a $l = 3t - s_{ef}$, ed essendo $s_{ef} + s_{in} = s$, si ottiene: $l = 3t - s + s_{in}$, ovvero:

$$3t - s = l - i \quad (1.5)$$

Tale relazione è di grande importanza per lo studio dell’equilibrio di una travatura ed in base ad essa le travature sono classificabili nei seguenti quattro gruppi:

- $l > 0$ e $i > 0$: travature labili⁵ e staticamente indeterminate⁶;
- $l > 0$ e $i = 0$: travature labili e staticamente determinate;
- $l = 0$ e $i > 0$: travature non labili e staticamente indeterminate o più semplicemente travature ‘iperstatiche’;
- $l = 0$ e $i = 0$: travature non labili e staticamente determinate o più semplicemente travature ‘isostatiche’.

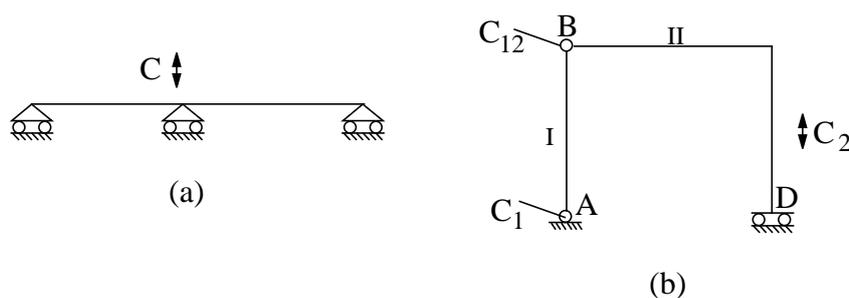


Figura 1.16: Travature labili e staticamente indeterminate ($l = 1$ e $i = 1$).

⁴L’efficacia va intesa in questo contesto solamente quale capacità di eliminare un grado di libertà. Vincoli che con tale criterio vengono definiti qui inefficaci possono essere di grande importanza per il comportamento strutturale.

⁵Una struttura labile con grado di labilità pari ad l si dice anche ‘ l volte labile’.

⁶Una struttura staticamente indeterminata con grado di iperstaticità pari ad i si dice anche ‘ i volte iperstatica’.

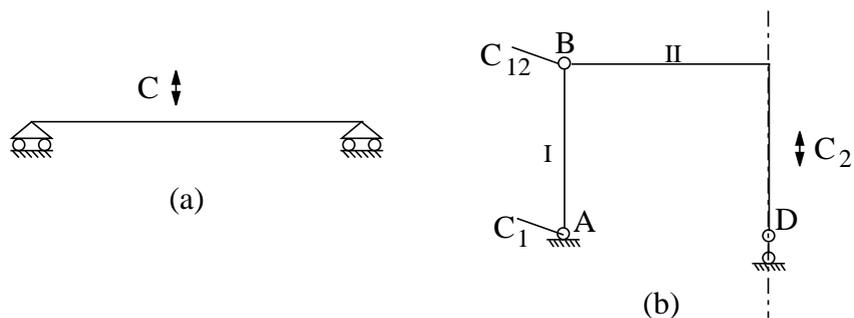


Figura 1.17: Travature labili e staticamente determinate ($l = 1$ e $i = 0$).

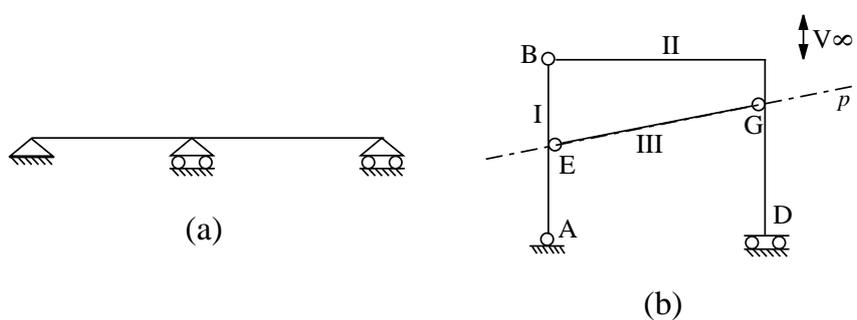


Figura 1.18: Travature iperstatiche ($l = 0$ e $i = 1$).

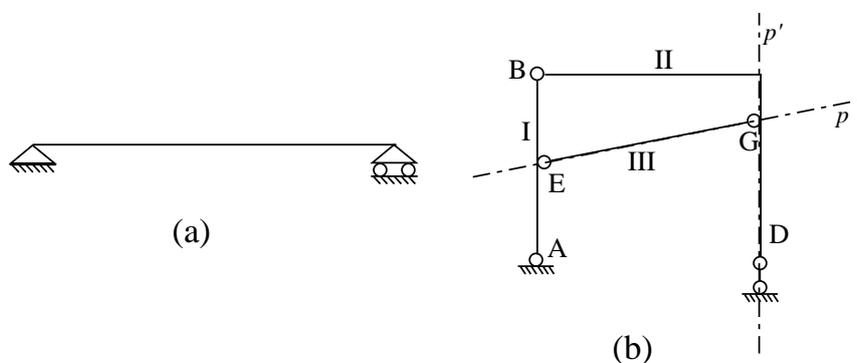


Figura 1.19: Travature isostatiche ($l = 0$ e $i = 0$).

Per identificare una travatura bisogna contare il numero dei tratti t ed il numero dei vincoli semplici s . Conviene quindi determinare il grado di labilità l mediante la determinazione dei possibili centri di rotazione con i metodi noti dalla Meccanica Razionale, e ricavare quindi i dalla relazione (1.5).

Da un punto di vista statico, il numero di reazioni vincolari incognite è pari ad s , mentre il numero di equazioni di equilibrio linearmente indipendenti che possono scriversi è pari a $3t$. Infatti, come si vedrà meglio in seguito, per ognuno dei tratti possono

scriversi le equazioni cardinali della statica, per un totale di $3t$ equazioni. Ogni altra equazione di equilibrio che si scrivesse, considerando ad esempio l'equilibrio di più tratti insieme, risulterebbe dipendente dalle prime $3t$ equazioni.

Si consideri ad esempio le travature delle figure 1.16-1.19. Per la trave di figura 1.16.a si ha $3t - s = 0$. Ai fini della valutazione di l si osserva che ognuno dei tre carrelli impone, da solo, che l'eventuale⁷ centro di rotazione sia sulla retta verticale passante per il carrello stesso. Tali tre condizioni sono tra loro compatibili con la posizione del centro nel punto improprio verticale, corrispondente ad una traslazione orizzontale. Quindi esistono atti di moto rigido consentiti dai vincoli ed il loro centro di rotazione è univocamente definito. Pertanto tali atti di moto sono univocamente definiti da un solo parametro scalare (appunto la velocità di traslazione) e dunque $l = 1$.

Per la struttura di figura 1.16.b si ha ancora che $3t - s = 0$. Inoltre la cerniera in A impone che l'eventuale centro C_1 del tratto I sia A . La cerniera in B impone che l'eventuale centro relativo C_{12} tra i due tratti I e II sia B . Il doppio pendolo in D impone all'eventuale centro di rotazione C_2 di coincidere con il punto improprio verticale. Le tre condizioni sono tra loro compatibili e, anche in questo caso, determinano univocamente le posizioni di tutti i centri assoluti e relativi. Pertanto anche in questo caso l'atto di moto è definito da un solo parametro, ad esempio dalla velocità di rotazione del tratto I intorno ad A .

Ragionando come si è fatto per la trave di figura 1.16.a si riconosce immediatamente che la trave di figura 1.17.a è una volta labile. Essendo $3t - s = 1$, risulterà $i = 0$ per cui essa è staticamente determinata.

Per la travatura di figura 1.17.b i vincoli in A e B impongono ai centri C_1 e C_{12} di trovarsi rispettivamente in A ed in B . Il vincolo in D impone invece al centro C_2 di trovarsi sulla retta verticale per D . Le condizioni sono tra loro compatibili con una ed una sola disposizione dei tre centri di rotazione, ovvero quella riportata in figura, per cui $l = 1$. Essendo $3t - s = 1$ anche in questo caso risulterà $i = 0$ e la struttura è staticamente determinata.

Quanto alle strutture riportate nelle figure 1.18 e 1.19, mentre si riconosce facilmente che $l = 0$ per quelle nelle figure 1.18.a e 1.19.a, per le altre due travature si procede come segue. Per la travatura di figura 1.18.b si può operare sia considerando la struttura come costituita da 3 tratti, sia vedendola formata dai due tratti I e II e considerando quindi il tratto III come un pendolo che costituisce un ulteriore vincolo semplice tra i tratti I e II . Utilizzando il primo approccio i vincoli impongono ai centri di rotazione le condizioni riportate nella tabella 1.1.

Posizione vincolo	A	B	D	E	G
Condizione	$C_1 = A$	$C_{12} = B$	$C_2 = V\infty$	$C_{13} = E$	$C_{23} = G$

Tabella 1.1: Condizioni sui centri imposte dai vincoli nella struttura di figura 1.18.b.

Le condizioni sui centri relativi non sono compatibili fra loro perché per avere un

⁷Si usa il termine 'eventuale' perché il fatto che il centro di rotazione esista o meno va determinato valutando se le condizioni imposte dai vincoli siano compatibili tra loro, come si vedrà dagli esempi seguenti.

cinematismo C_{12} , C_{23} e C_{13} dovrebbero essere allineati. Pertanto si può dire che non può esistere un moto relativo tra I e II e dunque in tal caso un atto di moto sarebbe possibile solamente avendo C_1 coincidente con C_2 , cosa evidentemente non compatibile con le altre due condizioni della tabella 1.1. Pertanto la struttura risulta non labile. Essendo poi $3t - s = -1$ essa risulta una volta iperstatica.

Ragionando con il secondo approccio, che peraltro è consigliabile, il pendolo EG viene considerato quale un ulteriore vincolo tra i tratti I e II , che impone ai due punti E di I e G di II di avere, in un moto rigido, la stessa componente di velocità di traslazione nella direzione dell'asse p del pendolo. Con questo approccio i vincoli impongono ai centri di rotazione le condizioni riportate nella tabella 1.2. Si riconosce dalla tabella

Posizione vincolo	A	B	D	tratto III
Condizione	$C_1 = A$	$C_{12} = B$	$C_2 = V\infty$	$C_{12} \in p$

Tabella 1.2: Condizioni sui centri imposte dai vincoli nella struttura di figura 1.18.b considerando il tratto III come un vincolo tra I e II .

che la condizione che il centro C_{12} sia allineato con E e G , ricavata in precedenza come condizione di allineamento dei centri relativi, viene qui ottenuta direttamente come condizione imposta dal tratto III visto come pendolo. Pertanto le due condizioni imposte dai vincoli sul centro C_{12} sono fra loro incompatibili e, continuando il ragionamento come si è fatto in precedenza, si arriva allo stesso risultato.

I vincoli della struttura in figura 1.19.b impongono ai centri le condizioni riportate nella tabella 1.3. Anche in questo caso le condizioni imposte sul centro relativo C_{12} dal

Posizione vincolo	A	B	D	tratto III
Condizione	$C_1 = A$	$C_{12} = B$	$C_2 \in p'$	$C_{12} \in p$

Tabella 1.3: Condizioni sui centri imposte dai vincoli nella struttura di figura 1.19.b considerando il tratto III come un vincolo tra I e II .

vincolo in B e dal tratto III sono incompatibili fra loro. Quindi non può esserci un moto relativo tra I e II , per cui in un eventuale moto rigido i tratti I e II dovrebbero muoversi come un unico tratto rigido, e quindi dovrebbe aversi $C_1 = C_2$. Ciò però è incompatibile con le condizioni imposte dai vincoli in A ed in D , come si vede dalla tabella, in quanto il centro $C_1 = C_2$ non può contemporaneamente trovarsi in A e sulla retta p' .

1.2.1 Il problema dell'equilibrio

La determinazione delle reazioni vincolari esterne ed interne costituisce il 'problema dell'equilibrio'. Il teorema di Lagrange, noto dalla Meccanica Razionale, afferma che una struttura soggetta ad un sistema di forze attive è in equilibrio se e solo se esso compie potenza virtuale nulla per ogni atto di moto rigido consentito dai vincoli.

Se $l = 0$ evidentemente non esistono possibili moti rigidi della travatura consentiti dai vincoli, e dunque l'equilibrio della travatura è sicuramente assicurato. Pertanto, qualsiasi sia il sistema di forze esterne agente sulla travatura il sistema di $3t$ equazioni ammette sicuramente soluzione. Si possono distinguere dunque i due casi in cui $i = 0$ e $i > 0$.

Nel primo caso ($i = 0$) la travatura è isostatica. Essendo $3t - s = 0$ il numero di equazioni è pari a quello delle incognite. Pertanto il fatto che il problema ammette sempre soluzione qualsiasi sia il sistema delle forze esterne agente equivale a dire che il sistema di equazioni di equilibrio ammette soluzione qualsiasi sia il vettore dei termini noti. Ciò avviene se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è non nullo e questo, a sua volta, assicura anche l'unicità della soluzione.

Pertanto si ricava il seguente risultato fondamentale:

Teorema 1 *Il problema dell'equilibrio per una travatura isostatica ammette sempre una ed una sola soluzione.* ■

Nel caso in cui $i > 0$ la travatura è iperstatica. Essendo $s - 3t = i > 0$ il numero delle incognite è maggiore del numero di equazioni. Poiché si è visto che il problema ammette sempre soluzione, ciò significa che la matrice dei coefficienti del sistema è di rango massimo, pari a $3t$, e dunque esistono ∞^i soluzioni. Pertanto si ricava il seguente altro risultato fondamentale:

Teorema 2 *Il problema dell'equilibrio per una travatura iperstatica ammette sempre ∞^i soluzioni, avendo indicato con i il grado di iperstaticità.* ■

Si deduce che per ricavare il valore delle reazioni vincolari per una travatura iperstatica non basta risolvere il problema dell'equilibrio. Si vedrà in seguito che in tal caso, di estremo interesse per le applicazioni in quanto la maggior parte delle travature sono iperstatiche, per ricavare le reazioni vincolari sarà necessario tenere conto delle caratteristiche di deformabilità del materiale e quindi degli aspetti cinematici.

Nel caso di travature labili il problema dell'equilibrio può ammettere o non ammettere soluzione a seconda del sistema di forze attive agente. Infatti, se il sistema di forze attive compie potenza virtuale non nulla per uno dei possibili atti di moto rigido è noto dal teorema di Lagrange che l'equilibrio non può sussistere. Se invece il sistema di forze attive compie potenza virtuale nulla per qualsiasi atto di moto rigido consentito dai vincoli allora, sempre dal teorema di Lagrange, sappiamo che l'equilibrio sussiste. In tal caso la soluzione è unica se $i = 0$ mentre ci saranno ∞^i soluzioni se $i > 0$. Sussistono dunque i seguenti due risultati.

Teorema 3 *Se per una travatura labile ($l > 0$) e staticamente determinata ($i = 0$) il problema dell'equilibrio ammette soluzione allora tale soluzione è anche unica.* ■

Teorema 4 *Se per una travatura labile ($l > 0$) e staticamente indeterminata ($i > 0$) il problema dell'equilibrio ammette soluzione allora esistono ∞^i soluzioni.* ■

Di tali risultati non si fornisce una dimostrazione ma si analizzeranno alcuni esempi nella prossima sezione.

1.3 Calcolo delle reazioni vincolari

1.3.1 Travi ad un solo tratto

Si consideri la trave di figura 1.20. Essendo essa isostatica siamo sicuri che la soluzione del problema dell'equilibrio esiste ed è unica. Per quanto il problema in esame sia di semplicissima soluzione si vuole comunque fin da ora sottolineare la sequenza di operazioni da compiere per la soluzione di qualsiasi problema di statica:

- Determinare il corpo \mathcal{C} per il quale si vuole imporre l'equilibrio.
- Determinare il sistema di forze \mathcal{F} agente su tale corpo. Esso sarà costituito dalla somma del sistema di tutte le forze e coppie esterne (note) direttamente agenti su \mathcal{C} , detto sistema di forze attive \mathcal{F}_a , e del sistema di tutte le reazioni (incognite) che il mondo esterno a \mathcal{C} esplica su \mathcal{C} , detto sistema delle forze reattive \mathcal{F}_r .
- Scrittura e soluzione delle equazioni cardinali della statica per il sistema di forze $\mathcal{F} = \mathcal{F}_a + \mathcal{F}_r$.

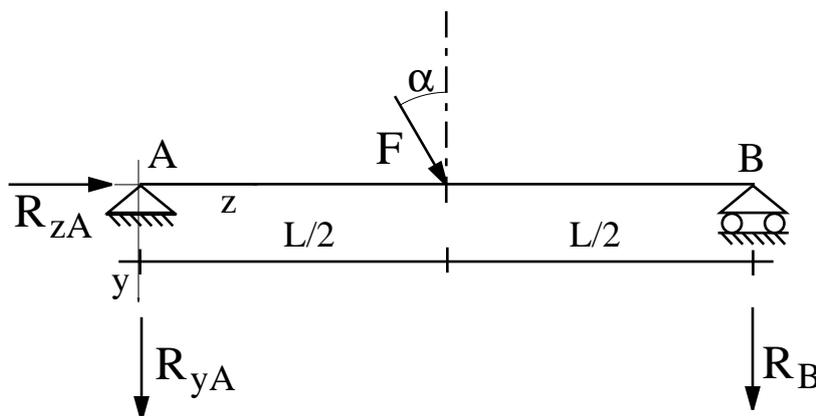


Figura 1.20: Trave appoggiata con una forza in mezziera.

Nel caso in esame il corpo per il quale s'impone l'equilibrio è tutta la trave AB . Su di essa agiscono la forza F in mezziera e le reazioni incognite in A e B . Le equazioni cardinali della statica si scrivono imponendo l'equilibrio alla traslazione in direzione y e z e quello alla rotazione intorno ad A :

$$\begin{cases} R_{yA} + R_B + F \cos \alpha = 0 \\ R_{zA} + F \sin \alpha = 0 \\ -R_B L - F \cos \alpha \frac{L}{2} = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Esse forniscono la soluzione:

$$R_{zA} = -F \operatorname{sen} \alpha \quad R_{yA} = -\frac{F \cos \alpha}{2} \quad R_B = -\frac{F \cos \alpha}{2}$$

Il segno negativo di tutti i termini vuol dire che i versi ipotizzati inizialmente in figura 1.20 non sono quelli giusti. In figura 1.21 si sono riportate le reazioni con il loro verso ed il loro modulo.

Si noti che ognuna delle due reazioni verticali in A ed in B può essere direttamente determinata con una sola equazione imponendo, rispettivamente, l'equilibrio alla rotazione intorno a B e ad A .

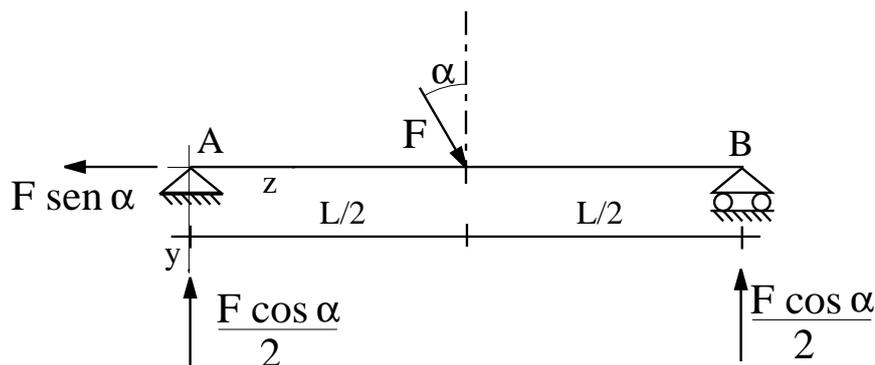


Figura 1.21: Trave appoggiata con una forza in mezziera.

Si consideri ora la trave di figura 1.22. Si ricava immediatamente, imponendo l'equilibrio alla traslazione orizzontale, che la reazione orizzontale in A è nulla. Assumendo positive le reazioni verticali in A e B se dirette verso l'alto, ed eliminando per semplicità di notazione il pedice y , le due equazioni di equilibrio alla rotazione intorno ad A ed a B si scrivono come segue:

$$R_B (a + b) - F a = 0 \quad - R_A (a + b) + F b = 0$$

e forniscono i valori:

$$R_A = \frac{b}{a + b} F \quad R_B = \frac{a}{a + b} F$$

Si riconosce dunque che il rapporto tra i moduli delle due reazioni è inversamente proporzionale a quello tra le relative distanze dalla forza verticale in mezziera.

Si consideri ora la trave 1 volta iperstatica di figura 1.23 e si ponga pari ad X il valore della reazione verticale in B , assunto positivo se la reazione è verso il basso. Imponendo l'equilibrio di tutta la trave AC soggetta alla forza F ed alle reazioni vincolari assunte positive se dirette come in figura si ricava il valore di queste ultime (i calcoli si lasciano come esercizio):

$$R_{zA} = F \operatorname{sen} \alpha \quad R_{yA} = \frac{F \cos \alpha}{4} + \frac{X}{2} \quad R_B = X \quad R_C = \frac{3 F \cos \alpha}{4} + \frac{X}{2} \quad (1.7)$$

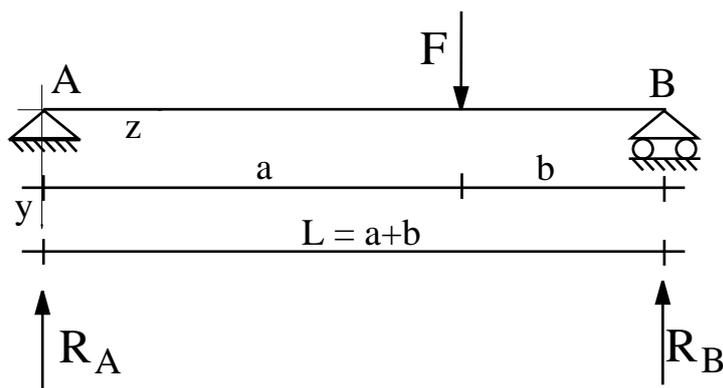


Figura 1.22: Trave appoggiata con una forza verticale.

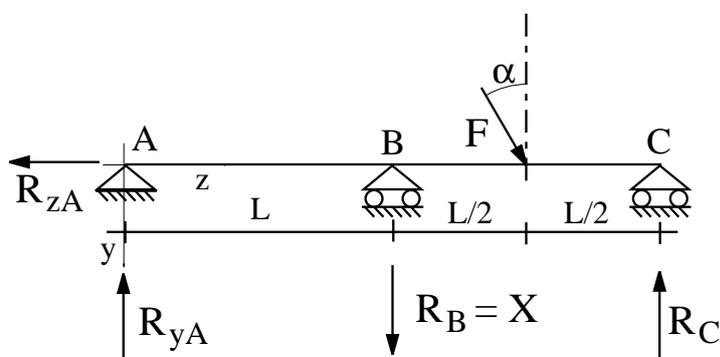


Figura 1.23: Trave iperstatica.

Dunque, qualsiasi sia il valore di X le (1.7) sono soluzione del problema dell'equilibrio, che dunque ammette ∞^1 soluzioni coerentemente con il fatto che la struttura è una volta iperstatica.

La trave di figura 1.24 è invece labile e staticamente determinata. Dunque il problema dell'equilibrio non ammette sempre soluzione e ciò si evince immediatamente in questo semplice esempio perché chiaramente non può sussistere l'equilibrio per valori di $\sin \alpha \neq 0$, ovvero quando la forza \mathbf{F} non è verticale e quindi ha una componente orizzontale non nulla. Per $\alpha = 0$ la soluzione del problema dell'equilibrio esiste ed è unica, coerentemente con il fatto che $i = l + s - 3t = 0$ e con il teorema 3, e fornisce le reazioni:

$$R_A = \frac{F}{2} \quad R_B = \frac{F}{2}$$

ovvero le reazioni di una trave appoggiata con una forza verticale in mezzeria.

La trave di figura 1.25 è invece labile e staticamente indeterminata in quanto $3t - s = 0$ e $l = 1$ essendo possibile un atto di moto di traslazione orizzontale. Anche in questo caso dunque l'equilibrio non è sempre possibile, ed infatti la soluzione esiste solamente per $\sin \alpha = 0$, ovvero quando la forza è verticale. In tal caso, inoltre, essendo

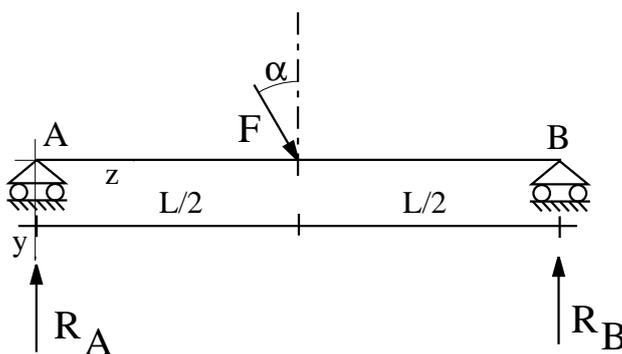


Figura 1.24: Trave labile e staticamente determinata.

$i = l + s - 3t = 1$, la soluzione non è unica e fornisce i seguenti ∞^1 valori delle reazioni vincolari:

$$R_A = \frac{F}{4} + \frac{X}{2} \quad R_B = X \quad R_C = \frac{3}{4}F + \frac{X}{2} \quad (1.8)$$

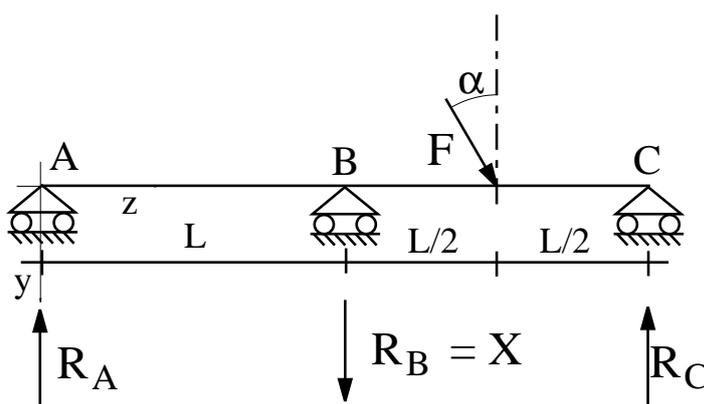


Figura 1.25: Trave labile e staticamente indeterminata.

Si è dunque verificato che la soluzione del problema dell'equilibrio quando esiste (sempre se $l = 0$, solo per alcuni sistemi di forze esterne quando $l > 0$), non è unica se $i > 0$. Questo vuol dire che per determinare le reazioni vincolari non basta solamente considerare il problema dell'equilibrio, ma bisognerà anche esaminare altri aspetti quali la deformabilità della struttura. In altre parole, per la determinazione delle reazioni vincolari, e anche delle caratteristiche della sollecitazione interna come si vedrà in seguito, bisognerà fare delle ipotesi sul comportamento del materiale e sulla geometria delle sezioni della trave.

Viceversa, per strutture staticamente determinate la soluzione quando esiste è unica. Dunque le reazioni vincolari (così come le caratteristiche della sollecitazione interna) non dipendono dal materiale e dalla geometria delle sezioni della travatura. In realtà

quest'ultima affermazione è vera entro i limiti in cui è accettabile l'ipotesi di piccoli spostamenti, cioè che gli spostamenti siano sufficientemente piccoli da poter confondere la configurazione deformata con quella indeformata, in modo da scrivere le equazioni di equilibrio con riferimento a quest'ultima piuttosto che alla configurazione deformata, come sarebbe invece a rigore richiesto.

1.3.2 Travi soggette ad un carico trasversale distribuito

Le forze concentrate rappresentano una schematizzazione matematica che risulta efficace quando un carico esterno agisce su una porzione relativamente limitata della trave. In molti casi il carico esterno agisce su una porzione estesa e va dunque schematizzato come un carico distribuito.

Facendo riferimento alla trave di figura 1.26, un carico distribuito in direzione y può essere definito con una funzione scalare q definita nell'intervallo $[0, L]$. Sull'intorno elementare di ampiezza dz dell'ascissa z agisce dunque una risultante verticale per z di modulo $dF = q(z) dz$, positiva se diretta verso il basso.

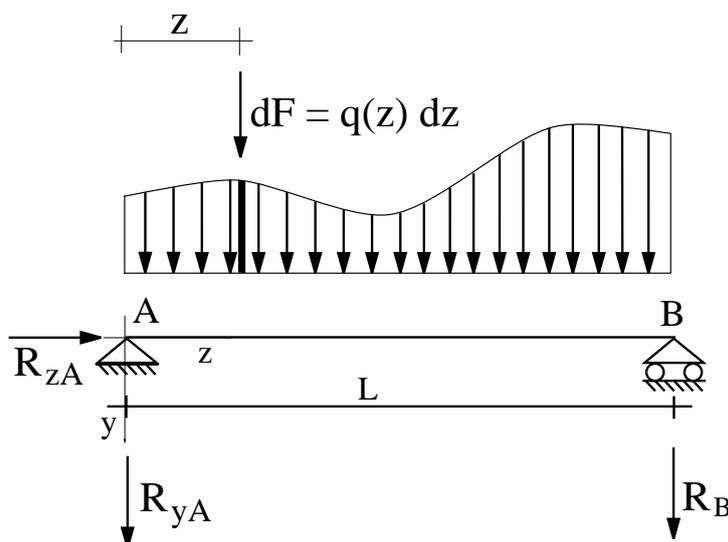


Figura 1.26: Trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito.

Si consideri ora l'equilibrio di tutta la trave, che è soggetta al carico q ed alle reazioni vincolari, e si scrivano le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} R_{zA} = 0 \\ R_{yA} + R_B + \int_0^L q(z) dz = 0 \\ -R_B L - \int_0^L q(z) z dz = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Per scrivere le (1.9) si è considerato che la sommatoria di tutti i contributi elementari $dF = q(z) dz$ fornisce l'integrale del carico tra 0 ed L . Inoltre, nello scrivere l'equilibrio alla traslazione intorno ad A , ovvero la terza delle (1.9), si è tenuto conto che il momento risultante di ciascuna delle forze elementari dF all'ascissa z è pari a $-dF z = -q(z) z dz$.

Si indichi con Q la risultante del carico q in $[0, L]$:

$$Q = \int_0^L q(z) dz \quad (1.10)$$

Facendo l'ipotesi che $Q \neq 0$ e ponendo:

$$\bar{z} = \frac{\int_0^L q(z) z dz}{\int_0^L q(z) dz} = \frac{1}{Q} \int_0^L q(z) z dz \quad (1.11)$$

le (1.9) si scrivono come segue:

$$\begin{cases} R_{zA} = 0 \\ R_{yA} + R_B + Q = 0 \\ -R_B L - Q \bar{z} = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Le (1.12) sono le equazioni che si scriverebbero se al posto del carico distribuito q si sostituisse la sua risultante Q all'ascissa \bar{z} . Tale ascissa rappresenta l'intersezione dell'asse z con l'asse centrale del carico q .

Pertanto, ai fini della determinazione delle reazioni vincolari si può sostituire al carico q la sua risultante Q disposta sull'ascissa \bar{z} . Infatti essa costituisce un sistema (costituito da un'unica forza) staticamente equivalente al carico distribuito in quanto ha la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi. Per chiarire meglio quest'ultima cosa basta riscrivere la (1.10)₂ come segue:

$$Q \bar{z} = \int_0^L q(z) z dz \quad (1.13)$$

in cui il primo membro rappresenta il momento risultante rispetto ad A della risultante Q disposta in \bar{z} , mentre il secondo membro è il momento risultante rispetto ad A di tutto il carico, avendo in entrambi i casi assunto positivi i momenti orari per semplicità. Per la definizione di \bar{z} dunque tali due momenti sono uguali. Si sottolinea ancora che, essendo Q per definizione uguale alla risultante del carico, allora se i due momenti risultanti rispetto ad A a primo e a secondo membro della (1.13) sono uguali allora lo sono anche i momenti risultanti rispetto a qualsiasi altro polo.

Tale circostanza è in realtà un caso particolare del seguente risultato di carattere generale.

Teorema 5 *La soluzione delle equazioni cardinali della statica per un corpo soggetto ad un sistema di forze attive \mathcal{F}_a e ad un sistema di forze reattive \mathcal{F}_r non cambia se si sostituisce \mathcal{F}_a con un sistema $\tilde{\mathcal{F}}_a$ ad esso staticamente equivalente, ovvero caratterizzato dalla stessa risultante e dallo stesso momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi.* ■

Si consideri ad esempio la trave di figura 1.27 soggetta ad un carico uniformemente distribuito.

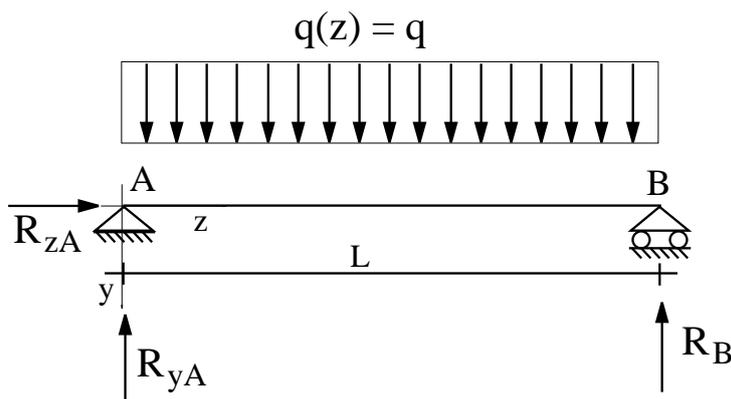


Figura 1.27: Trave appoggiata soggetta ad un carico uniformemente distribuito.

Dalle relazioni (1.10) si ottiene:

$$Q = \int_0^L q \, dz = q \int_0^L dz = qL \quad \bar{z} = \frac{1}{Q} \int_0^L qz \, dz = \frac{1}{qL} q \int_0^L z \, dz = \frac{L}{2} \quad (1.14)$$

e dunque il calcolo delle reazioni può effettuarsi con riferimento allo schema di figura 1.28, in cui al carico distribuito (lasciato in grigio) si è sostituita la risultante di modulo qL disposta in mezzeria. Si ottiene dunque:

$$R_{zA} = 0 \quad R_{yA} = \frac{qL}{2} \quad R_B = \frac{qL}{2}$$

Analogamente si ricavano le soluzioni dei casi delle figure 1.29 e 1.30, la cui determinazione si lascia come esercizio.

Nel caso in cui la risultante del carico Q è nulla il carico è staticamente equivalente ad una coppia il cui valore può ricavarsi, tra gli altri modi, considerando separatamente le risultanti delle parti positive e negative del carico e componendole poi insieme, come si è fatto nell'esempio di figura 1.31.

1.3.3 Travature a più tratti

Si consideri la trave isostatica di figura 1.32. Per il calcolo delle reazioni vincolari si possono scrivere le equazioni cardinali della statica per ognuno dei due tratti continui,

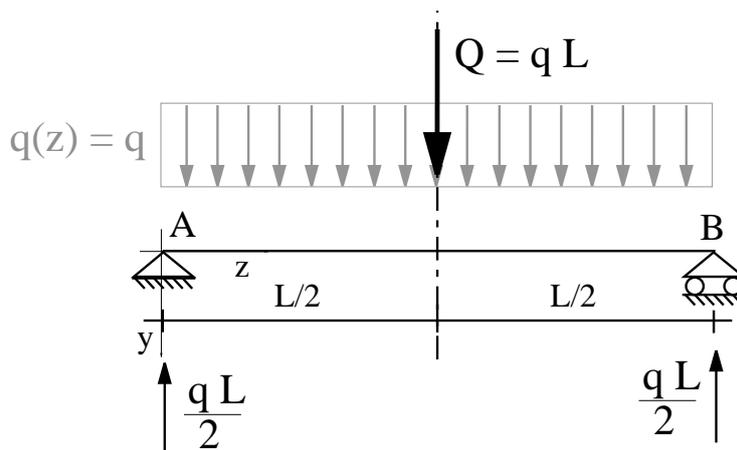


Figura 1.28: Reazioni per la trave appoggiata soggetta ad un carico uniformemente distribuito.

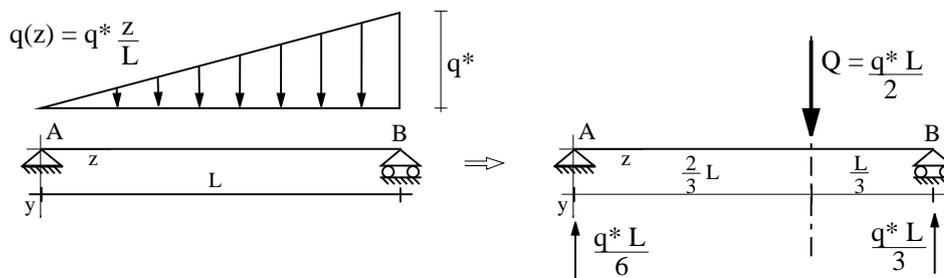


Figura 1.29: Trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito ‘triangolare’ crescente.

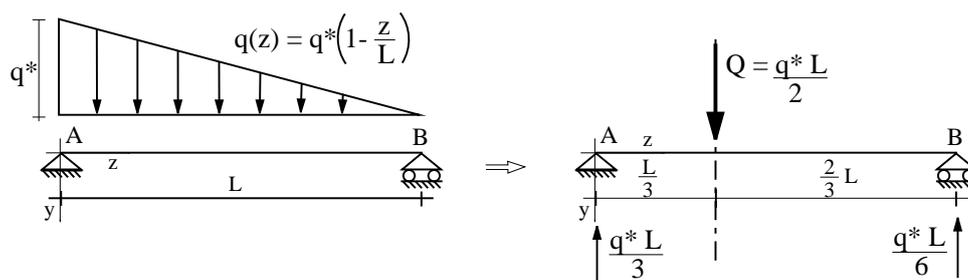


Figura 1.30: Trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito ‘triangolare’ decrescente.

ovvero per i tratti AC e CD . Tale procedura deriva da un postulato fondamentale che si enuncia come segue e prende il nome di ‘principio di sezionamento’:

Postulato 1 *Un corpo C è in equilibrio se e solo se ogni parte $C' \subset C$ è in equilibrio se soggetta al sistema di forze attive \mathcal{F}_a direttamente agente su C' ed al sistema di forze*

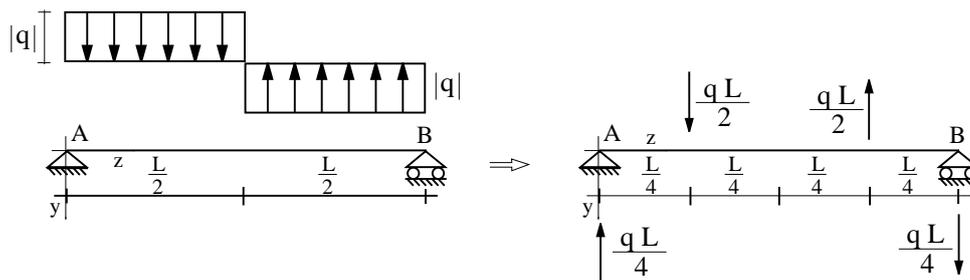


Figura 1.31: Trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito a risultante nulla.

reattive \mathcal{F}_r che il mondo esterno a C' esplica su C' . Il sistema \mathcal{F}_r è in generale a sua volta costituito dalla somma delle reazioni dei vincoli esterni direttamente applicati su C' e dalle reazioni interne che $C - C'$ esplica su C' . ■

Il principio di sezionamento va utilizzato più volte, in generale, al fine di assicurare che ciascuna parte $C' \subset C$ sia in equilibrio. In particolare, per determinare le reazioni vincolari esterne ed interne, bisogna assumere di volta in volta C' coincidente con un tratto, oppure con l'insieme di più tratti. Pertanto il procedimento già descritto nella sezione 1.3.1 prevede di ripetere più volte la seguente sequenza di operazioni:

- Determinare il corpo C' per il quale si vuole imporre l'equilibrio.
- Determinare il sistema di forze \mathcal{F} agente su tale corpo. Esso sarà costituito dalla somma del sistema di tutte le forze e coppie esterne (note) direttamente agenti su C , detto sistema di forze attive \mathcal{F}_a , e del sistema di tutte le reazioni (incognite) che il mondo esterno a C' esplica su C' , detto sistema delle forze reattive \mathcal{F}_r .
- Scrittura e soluzione delle equazioni cardinali della statica per il sistema di forze $\mathcal{F} = \mathcal{F}_a + \mathcal{F}_r$.

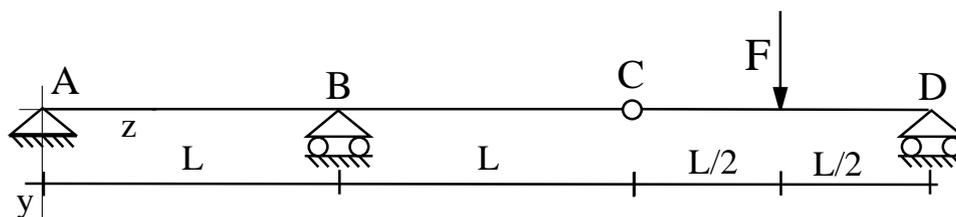


Figura 1.32: Travatura composta da due tratti.

Si consideri allora l'equilibrio del tratto AC . Essendo chiaro il soggetto da equilibrare bisogna ora determinare il sistema di forze agente su AC . Non essendoci forze attive bisognerà solo considerare le reazioni vincolari. D'altra parte, per isolare il tratto AC bisogna idealmente effettuare dei tagli in A , B e C e considerare le interazioni che

in tali punti nascono con il mondo esterno. Tali interazioni sono le reazioni del vincolo esterno doppio in A e di quello esterno semplice in B , e la reazione del vincolo interno doppio in C sul tratto AC . Si ottiene dunque lo schema di figura 1.33. Analogamente, considerando l'equilibrio del tratto CD bisogna effettuare dei tagli in C ed in D e si ottiene lo schema di figura 1.34. Nei due schemi si è tenuto conto del principio di azione e reazione per il quale, con i versi positivi assunti in figura, si ha: $R_{yC}^I = R_{yC}^I$ e $R_{zC}^{II} = R_{zC}^I$. I due schemi portano al seguente sistema di sei equazioni in sei incognite:

$$\text{equilibrio tratto } AC \begin{cases} R_{zA} + R_{zC}^I = 0 \\ R_{yA} + R_B + R_{yC}^I = 0 \\ -R_B L - R_{yC}^I 2L = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\text{equilibrio tratto } CD \begin{cases} -R_{zC}^{II} = 0 \\ -R_{yC}^{II} + F + R_D = 0 \\ -F \frac{L}{2} - R_D L = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Le (1.15)₁ e (1.16)₁ sono equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale; le (1.15)₂ e (1.16)₂ sono di equilibrio alla traslazione verticale; le (1.15)₃ e (1.16)₃ sono di equilibrio alla rotazione intorno, rispettivamente, ad A e a C .

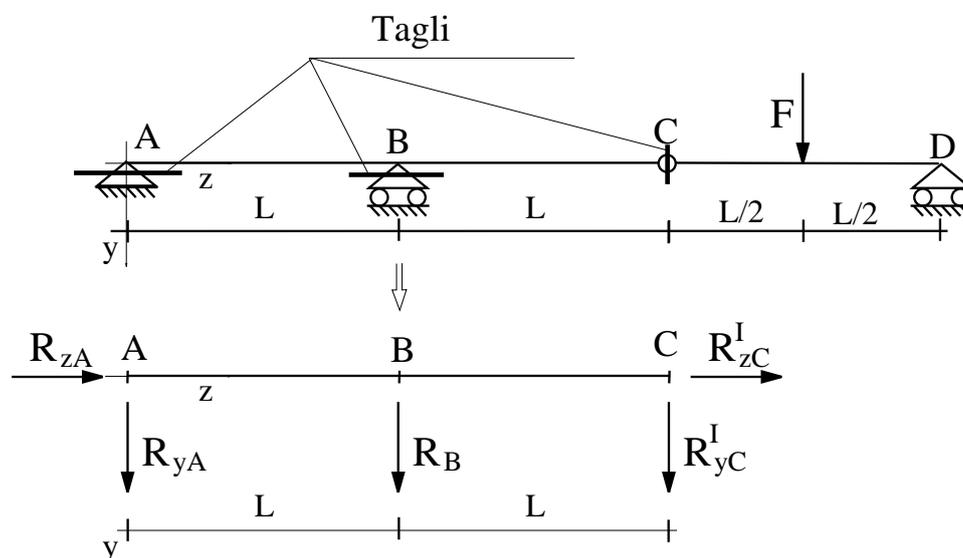
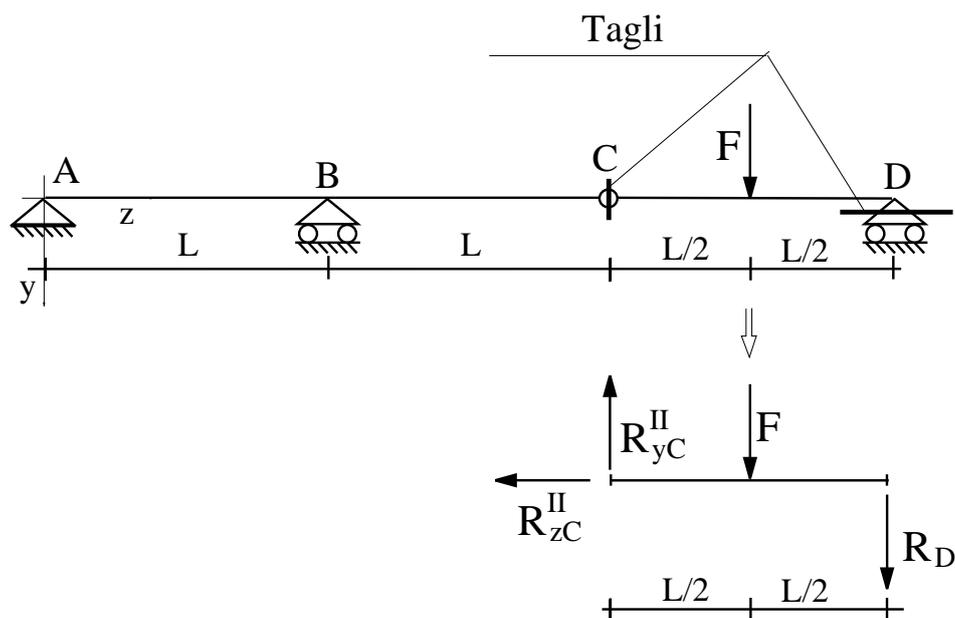


Figura 1.33: Equilibrio del tratto AC .

Si vede chiaramente che l'equilibrio del tratto CD coinvolge solamente le tre reazioni incognite R_{zC}^{II} , R_{yC}^{II} e R_D per cui le (1.16) possono essere risolte indipendentemente

Figura 1.34: Equilibrio del tratto CD .

dalle (1.15), in modo da determinare preliminarmente R_{zC}^{II} , R_{yC}^{II} e R_D :

$$R_{zC}^{II} = 0 \quad R_{yC}^{II} = \frac{F}{2} \quad R_D = -\frac{F}{2} \quad (1.17)$$

e quindi sostituire i valori $R_{yC}^I = R_{yC}^{II} = F/2$ e $R_{zC}^I = R_{zC}^{II} = 0$ nelle (1.15) per ricavare le altre tre incognite:

$$R_{zA} = 0 \quad R_B = -F \quad R_{yA} = \frac{F}{2} \quad (1.18)$$

Si riporta dunque la soluzione in figura 1.35 disegnando le forze con il loro verso effettivamente ottenuto in soluzione. Pertanto i valori indicati a fianco rappresentano i moduli delle forze stesse.

1.4 Le caratteristiche della sollecitazione

Si consideri la trave appoggiata con una forza verticale in mezzera, le cui reazioni vincolari sono riportate in figura 1.36.a.

Si immagini di effettuare un taglio nella sezione S in figura. Tale taglio è effettuato in un punto di continuità, dove esiste un vincolo triplo che trasmette due reazioni mutue tra le facce sinistra e destra del taglio, ognuna delle quali può essere decomposta in due forze non parallele passanti per il baricentro di S ed in una coppia.

In particolare si può decomporre ognuna delle due reazioni in due componenti una parallela ed un'altra ortogonale all'asse, ed in una coppia. Tali componenti vengono dette 'caratteristiche della sollecitazione'. La componente parallela all'asse è detta

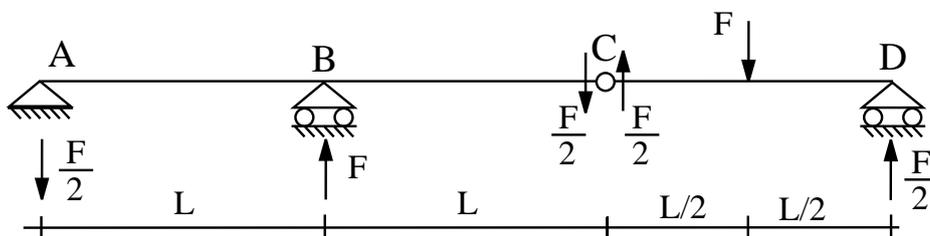


Figura 1.35: Reazioni vincolari.

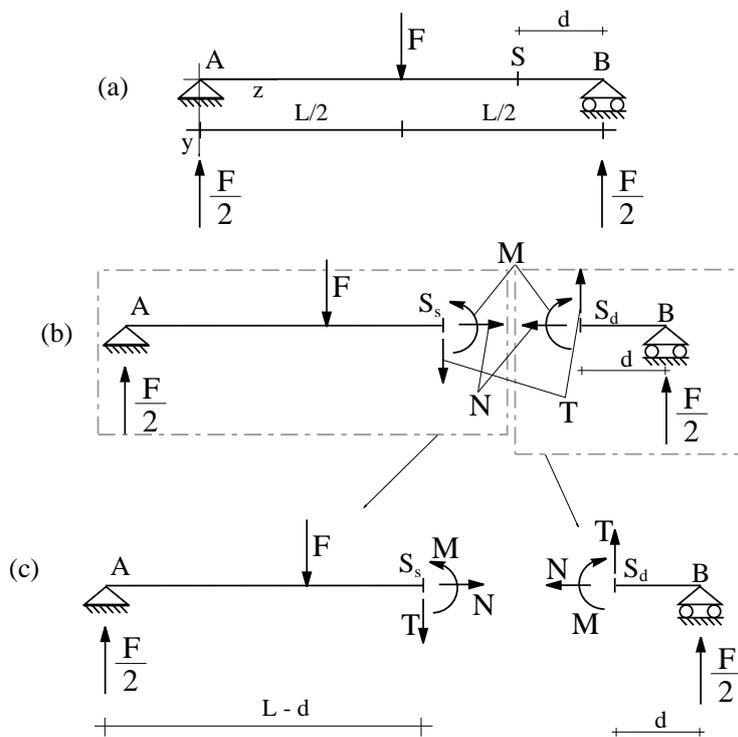


Figura 1.36: Determinazione di N , M e T in S .

‘sforzo normale’ ed è indicata con N , quella ortogonale è detta ‘taglio’, o anche ‘sforzo di taglio’, ed è indicata con T , la coppia è detta ‘momento flettente’, o semplicemente ‘momento’, ed è indicata con M .

Il taglio effettuato in S definisce due ‘facce’ S_s ed S_d rispettivamente a sinistra ed a destra del taglio (figura 1.36.b). Le componenti delle reazioni di S_s su S_d sono quindi

uguali ed opposte a quelle di S_d su S_s .

Per quanto riguarda i segni si conviene di assumere positive le caratteristiche della sollecitazione se le componenti della reazione di S_d su S_s , cioè quelle sulla faccia di sinistra del taglio, sono concordi agli assi del riferimento. Equivalentemente le caratteristiche sono positive se le componenti della reazione di S_s su S_d , cioè quelle sulla faccia di destra del taglio, sono discordi agli assi del riferimento. In figura 1.36.b si sono riportati i versi delle forze e delle coppie corrispondenti alle caratteristiche della sollecitazione assunte positive.

Per determinare il valore delle caratteristiche della sollecitazione nella sezione S , ed analogamente in qualsiasi altra sezione della trave, non bisogna introdurre concetti e metodi nuovi ma applicarne alcuni già oramai noti. Infatti, come si è già detto, le caratteristiche della sollecitazione possono semplicemente riguardarsi quali reazioni di un vincolo triplo interno, e possono dunque calcolarsi come tali applicando il principio di sezionamento e seguendo la sequenza di operazioni introdotta inizialmente nella sezione 1.3.1.

Avendo però già calcolato le reazioni vincolari esterne, queste ultime sono oramai forze note per cui conviene riformulare il principio di sezionamento come segue:

Postulato 2 *Un corpo C è in equilibrio se e solo se ogni parte $C' \subset C$ è in equilibrio. Il sistema di forze agente \mathcal{F} agente su C' è decomponibile in un sistema di forze note \mathcal{F}_n , dato da tutte le forze attive direttamente agenti su C' e dalle reazioni già calcolate agenti su C' , ed in sistema di forze incognite \mathcal{F}_i , tutte reattive.* ■

Evidentemente, nel problema in esame il sistema di forze incognite \mathcal{F}_i rappresenta proprio le caratteristiche della sollecitazione in S .

Il principio di sezionamento così riformulato andrà poi applicato tante volte quante sono le sezioni nelle quali si vuole calcolare le caratteristiche della sollecitazione, ripetendo più volte la solita sequenza di operazioni, che qui si specializza come segue:

- Determinare il corpo C' per il quale si vuole imporre l'equilibrio.
- Determinare il sistema di forze \mathcal{F} agente su C' e decomporlo nel sistema di forze note \mathcal{F}_n e quello di forze incognite \mathcal{F}_i rappresentato dalle caratteristiche della sollecitazione.
- Scrittura e soluzione delle equazioni cardinali della statica per il sistema di forze $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_i$.

Dunque, per il calcolo delle caratteristiche in S , si può assumere quale C' sia il tratto AS che, equivalentemente, il tratto SB .

Si consideri prima il secondo caso, ovvero si scelga come corpo C' il tratto SB . Il sistema di forze su esso agente è costituito dalla reazione vincolare in B , che è stata determinata e quindi è nota, e dalle tre caratteristiche della sollecitazione intese come reazioni di S_s su S_d . Si ottiene dunque lo schema di figura 1.36.c e, imponendo gli

equilibri alla traslazione nelle direzioni z ed y e l'equilibrio alla rotazione intorno a S :

$$\begin{cases} N = 0 \\ -T - \frac{F}{2} = 0 \\ -M + \frac{F}{2} d = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

si ottengono i valori:

$$N = 0 \quad T = -\frac{F}{2} \quad M = \frac{F}{2} d \quad (1.20)$$

Si lascia per esercizio la verifica che gli stessi valori si ottengono imponendo l'equilibrio del tratto AS .

Poiché le (1.20) sono state ottenute con riferimento ad una generica sezione a destra della forza concentrata in mezzeria si ricava che tra la forza F ed il punto B lo sforzo normale è identicamente nullo, lo sforzo di taglio T è costante ed uguale a $-F/2$, mentre il momento flettente varia linearmente con la distanza d dal carrello in B , annullandosi proprio in B ed assumendo il valore massimo $F L/4$ sulla sezione di mezzeria.

Considerando ora una sezione generica S' alla sinistra della forza F si ottiene lo schema di figura 1.37. Imponendo l'equilibrio di uno qualunque dei tratti AS' e $S'B$ si ricavano i seguenti valori delle caratteristiche della sollecitazione:

$$N = 0 \quad T = \frac{F}{2} \quad M = \frac{F}{2} d' \quad (1.21)$$

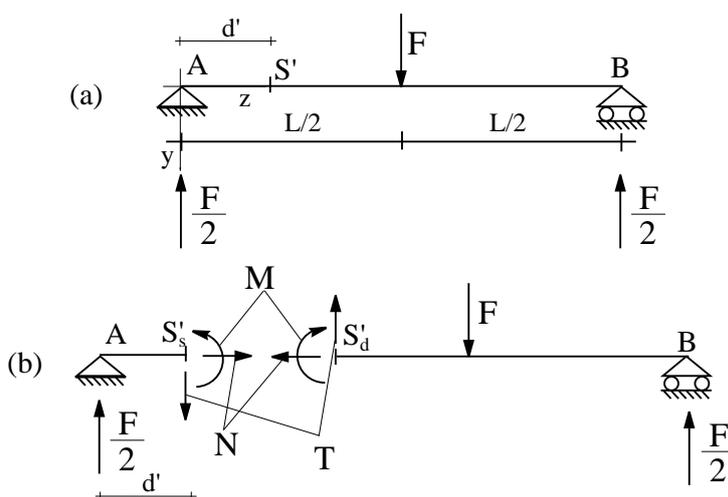


Figura 1.37: Determinazione di N , M e T in S' .

Poiché le (1.21) sono state ottenute con riferimento ad una generica sezione a sinistra della forza concentrata in mezzeria si ricava che tra il punto A e la forza F lo sforzo

normale è identicamente nullo, lo sforzo di taglio T è costante ed uguale a $F/2$, mentre il momento flettente varia linearmente con la distanza d' dal carrello in A , annullandosi proprio in A ed assumendo il valore massimo $F L/4$ sulla sezione di mezzeria.

I diagrammi del momento e del taglio così ottenuti sono rappresentati in figura 1.38. Per essi si è seguita e si seguirà in seguito la convenzione di riportare il diagramma del momento flettente M verso il basso se positivo, e quello del taglio T verso l'alto se positivo.

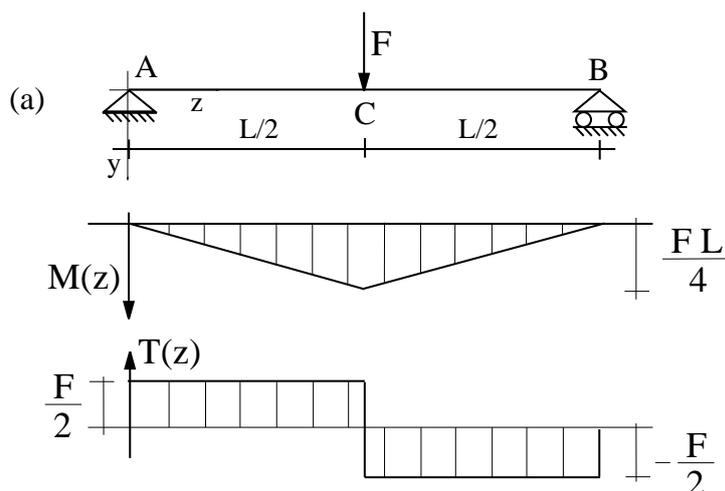


Figura 1.38: Trave appoggiata con una forza verticale in mezzeria: diagrammi di M e T .

Nel semplice esempio precedente si è illustrato come le caratteristiche della sollecitazione vadano viste alla stregua di reazioni vincolari interne relative al vincolo triplo di continuità. In una struttura isostatica, essendo possibile ricavare il valore delle reazioni vincolari e quindi il sistema di tutte le forze esterne, attive e reattive, che caricano la struttura, è dunque anche possibile ricavare le caratteristiche della sollecitazione in qualsiasi sezione, anche per problemi più complessi di quello visto in precedenza, mediante l'utilizzo di sole considerazioni di equilibrio.

Si osserva anche che l'ipotesi fatta fino ad ora che ognuno dei tratti sia monoconnesso è essenziale affinché per ogni punto della travatura risulti possibile con opportuni tagli estrarre una parte in cui, note le reazioni vincolari esterne ed interne, le uniche incognite rimangono le caratteristiche della sollecitazione nel punto stesso. In figura 1.39 è riportato invece il caso di una travatura costituita da un tratto biconnesso. Pur calcolando le reazioni vincolari, se si effettua un taglio in S ci si accorge che non è possibile effettuarne un secondo in modo da estrarre un pezzo il cui equilibrio consenta di calcolare le caratteristiche della sollecitazione in S . Si intuisce dunque che in qualche modo una maglia chiusa introduce ulteriori elementi di indeterminazione nel problema dell'equilibrio, ovvero ulteriori iperstaticità.

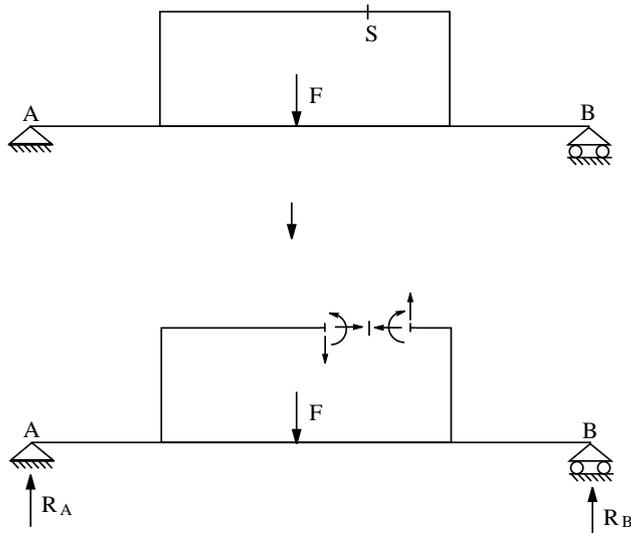


Figura 1.39: Esempio di travatura con una maglia chiusa.

1.4.1 Equazioni differenziali dell'equilibrio interno

In questa sezione si deriveranno delle relazioni differenziali per le funzioni M , T ed N imponendo l'equilibrio di una porzione elementare generica di trave, detta anche 'concio elementare'. A tale scopo, si consideri nella trave di figura 1.40 la parte di trave contenuta tra le sezioni alle ascisse z e $z + \Delta z$, di lunghezza Δz . Si faccia poi l'ipotesi che sulla trave siano applicati un carico distribuito q diretto trasversalmente ed uno p diretto secondo l'asse della trave, e che le funzioni q e p siano continue in $[z, z + \Delta z]$.

Nell'estrarre il concio elementare si sono evidentemente effettuati due tagli alle ascisse z e $z + \Delta z$ per cui il sistema di forze agenti sul concio è costituito dai carichi distribuiti q e p e dalle caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni dove sono stati effettuati i tagli.

Per scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale e alla rotazione intorno al baricentro della sezione di ascissa z conviene decomporre i carichi q e p nella somma di un valore costante, pari a quello assunto in z , ed una parte variabile. E' facile mostrare che il contributo di tale parte variabile nelle equazioni di equilibrio è un infinitesimo di ordine superiore rispetto agli altri termini, e che può essere dunque trascurato. Pertanto, nello scrivere le suddette equazioni, si assumerà direttamente che sul concio elementare siano presenti carichi uniformi di intensità $q(z)$ e $p(z)$, ottenendo relazioni esatte anche per carico variabile.

Si ottiene allora:

$$\begin{cases} N(z + \Delta z) - N(z) + p(z) \Delta z = 0 \\ T(z + \Delta z) - T(z) + q(z) \Delta z = 0 \\ -T(z + \Delta z) \Delta z + M(z + \Delta z) - M(z) - q(z) \frac{\Delta z^2}{2} = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

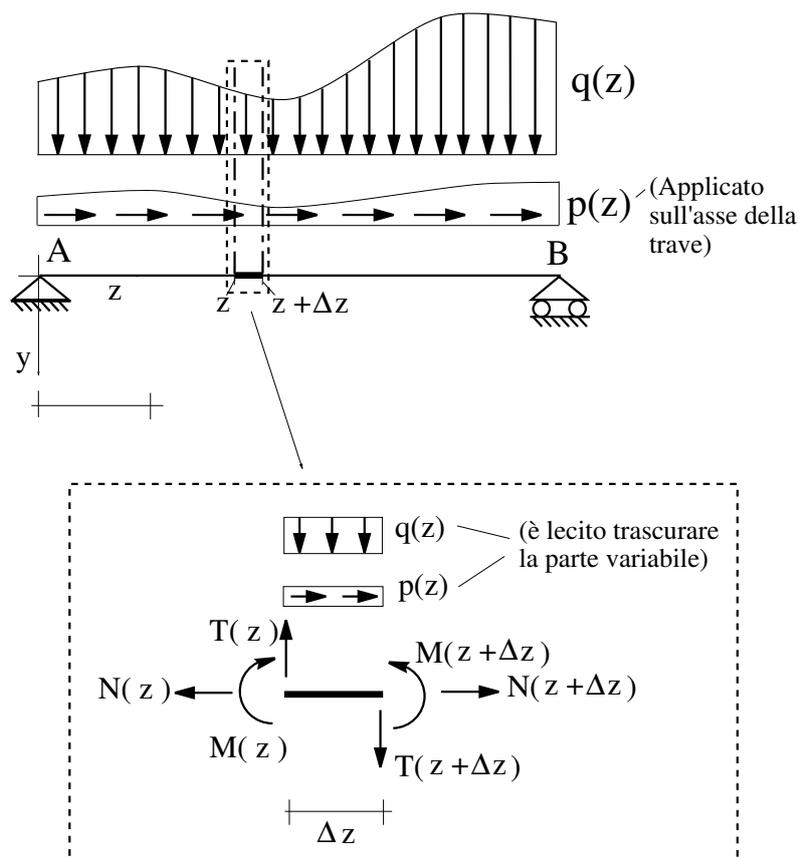


Figura 1.40: Equilibrio del concio elementare.

Dividendo per Δz e passando al limite per $\Delta z \rightarrow 0$ si ottiene:

$$N'(z) + p(z) = 0 \quad T'(z) + q(z) = 0 \quad M'(z) - T(z) = 0 \quad (1.23)$$

ovvero, sottointendendo la dipendenza da z :

$$\begin{cases} N' = -p \\ T' = -q \\ M' = T \end{cases} \quad (1.24)$$

Derivando la terza e sostituendo nella seconda si ottiene anche la relazione:

$$M'' = -q \quad (1.25)$$

Le (1.24) sono le equazioni differenziali dell'equilibrio interno per la trave. Esse sono valide in tutti i punti in cui le funzioni q e p sono continue e vanno combinate con opportune condizioni al contorno per determinare le funzioni incognite N , T e M .

Si nota che nei tratti in cui il carico q è nullo dalle (1.24) si ricava che il taglio è costante ed il momento flettente è lineare, mentre quando q è non nullo ma costante il taglio è lineare ed il momento flettente è una funzione quadratica, ovvero una parabola.

1.4.2 Un esempio di soluzione analitica delle equazioni differenziali di equilibrio

Si è visto in precedenza come determinare i diagrammi del momento e del taglio su una trave appoggiata con una forza verticale concentrata in mezzera scrivendo direttamente le equazioni di equilibrio per un elemento generico di trave. Più in generale, una volta determinate le reazioni vincolari, è possibile determinare le caratteristiche della sollecitazione senza risolvere in modo completamente analitico le equazioni differenziali (1.24) e le condizioni al contorno, come si vedrà in seguito.

In questa sezione si vuole invece mostrare come sia possibile risolvere il problema il problema precedente mediante la soluzione analitica delle (1.24) e delle relative condizioni al contorno senza preliminarmente ricavare le reazioni vincolari.

Con riferimento alla figura 1.36, si osserva che il carico q è discontinuo in $z = L/2$, per cui le (1.24)₂₋₃ vanno integrate negli intervalli $[0, L/2[$ e $]L/2, L]$, in cui il carico q è identicamente nullo. La (1.24)₁ può invece direttamente essere integrata in tutto $[0, L]$ essendo il carico p nullo su tutta la trave e quindi continuo.

Si ricavano dunque le espressioni:

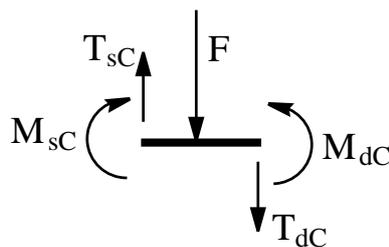
$$\left\{ \begin{array}{ll} N(z) = c_1 & z \in [0, L] \\ T(z) = c_2 & z \in [0, \frac{L}{2}[\\ T(z) = c_3 & z \in]\frac{L}{2}, L] \\ M(z) = c_2 z + c_4 & z \in [0, \frac{L}{2}[\\ M(z) = c_3 z + c_5 & z \in]\frac{L}{2}, L] \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Le condizioni al contorno si scrivono, per ognuna delle caratteristiche della sollecitazione, in tutti i punti estremi degli intervalli di validità delle (1.26) in cui non esiste un vincolo la cui reazione incognita renda impossibile a priori definire una condizione per la caratteristica stessa. In altre parole, per la soluzione analitica delle equazioni differenziali di equilibrio non bisogna preliminarmente calcolare le reazioni vincolari. Esse vanno considerate in questa fase della soluzione delle incognite.

Nel caso in esame, per esempio, non si potrà scrivere una condizione per lo sforzo normale in $z = 0$ in quanto esso è pari alla reazione orizzontale in A , che come si è detto va considerata incognita (sebbene in questo esempio sia talmente immediata da calcolare che risulta difficile pensarla non nota). La condizione al contorno per lo sforzo normale va scritta invece in B , ovvero per $z = L$, dove non essendoci alcuna forza orizzontale applicata sarà necessariamente $N(L) = 0$.

Analogamente, in A e B non potranno scriversi condizioni per il taglio in quanto sono lì presenti le reazioni incognite verticali che, con il segno opportuno, forniscono proprio il taglio in A ed in B . Il momento flettente, invece, in A ed in B si deve annullare qualsiasi sia il valore delle reazioni dei vincoli. Ciò fornisce le condizioni $M(0) = 0$ e $M(L) = 0$.

Altre due condizioni si ricavano poi nella sezione C di mezzera. Infatti dall'equilibrio del concio a cavallo di tale sezione (figura 1.41), facendo tendere a zero l'ampiezza

Figura 1.41: Equilibrio dell'intorno di C .

del concio stesso si ricavano le relazioni:

$$T_{dC} - T_{sC} + F = 0 \quad M_{dC} - M_{sC} = 0 \quad (1.27)$$

dove:

$$T_{sC} = \lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}^-} T(z) = T\left(\frac{L^-}{2}\right) \quad T_{dC} = \lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}^+} T(z) = T\left(\frac{L^+}{2}\right) \quad (1.28)$$

$$M_{sC} = \lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}^-} M(z) = M\left(\frac{L^-}{2}\right) \quad M_{dC} = \lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}^+} M(z) = M\left(\frac{L^+}{2}\right) \quad (1.29)$$

Si evince dalle (1.27)-(1.29) che il momento è continuo in $z = L/2$ mentre il taglio ha una discontinuità $\Delta T_C = T_{dC} - T_{sC}$ di ampiezza pari e segno opposto alla forza verticale F applicata. Riassumendo, le cinque condizioni ai limiti sono:

$$\begin{aligned} N(L) = 0 \quad M(0) = 0 \quad M(L) = 0 \\ M\left(\frac{L^-}{2}\right) = M\left(\frac{L^+}{2}\right) \quad T\left(\frac{L^+}{2}\right) - T\left(\frac{L^-}{2}\right) = -F \end{aligned} \quad (1.30)$$

Esse sono 5 condizioni indipendenti pari al numero di costanti di integrazione da cui dipende la soluzione del problema dell'equilibrio. La soluzione di tale problema quindi esiste ed è unica in accordo con il fatto che la trave è isostatica. In particolare sostituendo le espressioni (1.26) nelle (1.30) condizioni si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_3 L + c_5 = 0 \\ c_2 \frac{L}{2} + c_4 = c_3 \frac{L}{2} + c_5 \\ c_3 - c_2 = -F \end{array} \right. \quad (1.31)$$

la cui soluzione è:

$$c_1 = 0 \quad c_2 = \frac{F}{2} \quad c_3 = -\frac{F}{2} \quad c_4 = 0 \quad c_5 = \frac{F L}{2} \quad (1.32)$$

e quindi le espressioni:

$$\left\{ \begin{array}{ll} N(z) = 0 & z \in [0, L] \\ T(z) = \frac{F}{2} & z \in [0, \frac{L}{2}[\\ T(z) = -\frac{F}{2} & z \in]\frac{L}{2}, L] \\ M(z) = \frac{F}{2} z & z \in [0, \frac{L}{2}[\\ M(z) = -\frac{F}{2} z + \frac{F L}{2} & z \in]\frac{L}{2}, L] \end{array} \right. \quad (1.33)$$

Le (1.33) sono le espressioni analitiche dei diagrammi del momento e del taglio ricavati in figura 1.38.

1.4.3 Un'interpretazione della convenzione sul tracciamento del diagramma del momento

Si è già osservato che le caratteristiche della sollecitazione in una sezione della trave ricavate nella modellazione monodimensionale rappresentano in qualche modo un'informazione mediata sulla sezione dello stato di sollecitazione presente sulla sezione stessa. Per avere informazioni sullo stato di sollecitazione in ogni punto della sezione è necessario utilizzare una modellazione tridimensionale.

In una modellazione tridimensionale e nelle ipotesi di comportamento elastico lineare ad un momento flettente positivo corrisponde uno stato di sollecitazione puntuale per il quale le fibre parallele a z disposte dalla parte di y positivo sono tese nella direzione di z , mentre le fibre parallele a z disposte dalla parte di y negativo risultano compresse nella direzione di z . In figura 1.42 è mostrato il tipo di diagramma di tensioni, ovvero di forze per unità di superficie, dirette secondo z che nascono in una sezione soggetta ad un momento positivo. Tale considerazione non può essere dimostrata e puntualizzata rigorosamente in questo punto della trattazione ed è dunque da accettare più dal punto di vista intuitivo. Essa però fornisce un'utile interpretazione fisica della convenzione adottata per il tracciamento del diagramma del momento, per la quale si usa dire che le ordinate del diagramma sono tracciate 'dalla parte delle fibre tese'.

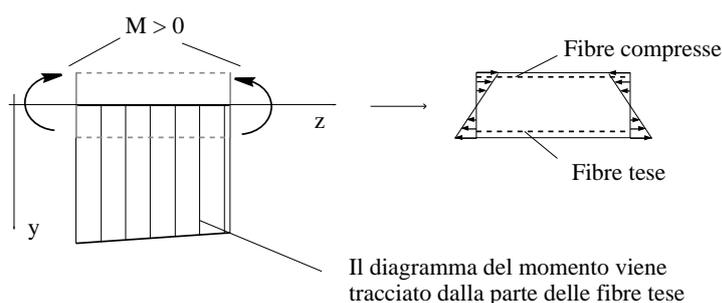


Figura 1.42: Fibre tese e fibre compresse.

1.4.4 Condizioni al contorno

Si è visto che alle equazioni differenziali di equilibrio vanno affiancate condizioni al contorno. Esse si scrivono negli estremi di ciascuno degli intervalli in cui si divide l'intero dominio che, nel caso in esame di travi ad asse rettilineo, può assumersi coincidente a sua volta con un intervallo $[0, L]$ di \mathcal{R} .

A titolo di esempio si consideri la trave di figura 1.43. Le forze verticali e le coppie, attive o reattive che siano, vanno considerate quali discontinuità⁸ per il carico trasversale q . Pertanto i punti di discontinuità di q sono le ascisse $z_1, z_2, z_3, z_4, z_6, z_8$ e z_{10} e dunque per l'integrazione delle (1.24)₂₋₃ bisogna dividere l'intervallo $[0, L]$ negli 8 intervalli $]0, z_1[,]z_1, z_2[,]z_2, z_3[,]z_3, z_4[,]z_4, z_6[,]z_6, z_8[,]z_8, z_{10}[$ e $]z_{10}, L[$. In ognuno

⁸La dimostrazione di questo fatto non viene data in quanto essa richiederebbe una rigorosa formalizzazione matematica dei concetti di forza e coppia concentrate che esula dalla presente trattazione.

degli intervalli l'integrazione indefinita delle (1.24)₂₋₃ fornisce le funzioni M e T a meno di due costanti di integrazione. Gli intervalli sono presi aperti perché in generale M e T possono essere discontinue nei loro estremi. Per ognuna delle ascisse z_i peraltro si indicheranno brevemente con M_s e T_s e con M_d e T_d i limiti sinistri e destri rispettivamente delle funzioni momento e taglio.

Le discontinuità per il carico assiale p sono in z_9 ed in z_{10} , per cui per l'integrazione della (1.24)₁ bisogna dividere l'intervallo $[0, L]$ nei tre intervalli $]0, z_9[$, $]z_9, z_{10}[$ e $]z_{10}, L[$, in ognuno dei quali si ricava N a meno di una costante di integrazione.

In totale, l'integrazione indefinita delle (1.24) fornisce N , M e T a meno di $2 \times 8 + 3 = 19$ costanti di integrazione a cui dovranno corrispondere 19 condizioni al contorno.

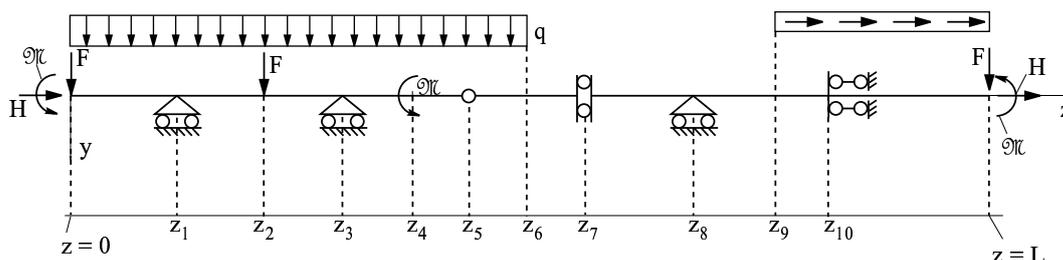


Figura 1.43: Un esempio di scrittura delle condizioni al contorno.

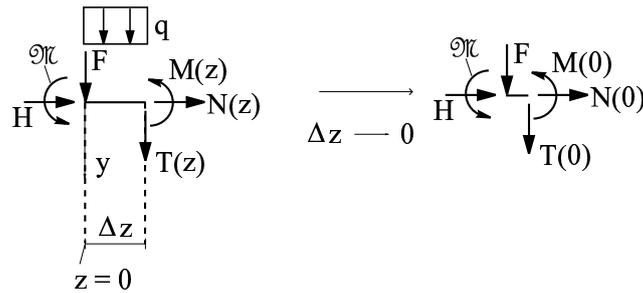
In $z = 0$ ed in $z = L$, ovvero negli estremi della trave, vanno scritte tante condizioni quante sono le componenti non vincolate. Per ogni componente non vincolata infatti, non essendoci una reazione vincolare, la corrispondente forza applicata o è nulla oppure è una forza o una coppia nota. Pertanto la corrispondente caratteristica della sollecitazione o è nulla oppure comunque è nota. Ad esempio, imponendo l'equilibrio per il tratto tra le ascisse 0 e Δz , al tendere a 0 di Δz il contributo del carico distribuito q diventa un infinitesimo di ordine superiore e le forze e la coppia concentrate forniscono direttamente le caratteristiche della sollecitazione in $z = 0$ (figura 1.44):

$$N(0) = -H \quad T(0) = -F \quad M(0) = -\mathfrak{M} \quad (1.34)$$

Un modo pratico per arrivare alla scrittura di tali condizioni si ottiene considerando che, essendo la trave alla destra dell'ascissa $z = 0$, le forze F e H e la coppia \mathfrak{M} ivi applicate possono essere viste quali le azioni applicate sulla faccia destra di un taglio. Considerate in tal modo direttamente quali caratteristiche della sollecitazione esse sono tutte negative in segno in quanto sono concordi agli assi del riferimento.

In modo analogo si possono scrivere le condizioni in $z = L$ considerando le azioni ivi applicate direttamente quali caratteristiche della sollecitazione agenti sulla faccia sinistra di un taglio. Essendo concordi con gli assi del riferimento esse sono positive in segno e si ottiene dunque:

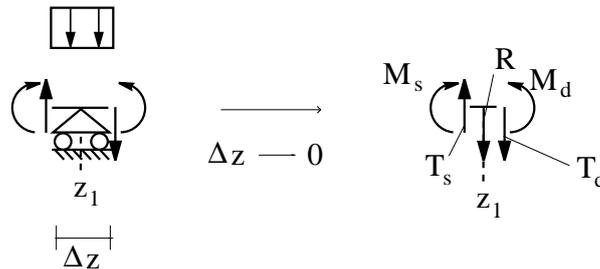
$$N(L) = H \quad T(L) = F \quad M(L) = \mathfrak{M} \quad (1.35)$$

Figura 1.44: Condizioni in $z = 0$.

Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_1 , ovvero del punto di applicazione di un carrello, si ricava invece (figura 1.45):

$$\text{in } z_1: M_s = M_d \quad (1.36)$$

mentre non può scriversi alcuna condizione sul taglio in quanto la differenza di taglio è legata alla reazione vincolare che, nel procedimento analitico, va considerata come incognita. La (1.36) è in generale la condizione da scrivere in prossimità di un carrello con piano di scorrimento parallelo all'asse della trave.

Figura 1.45: Condizioni in z_1 .

Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_2 , dove è applicata la forza verticale F , si ricava invece (figura 1.46):

$$\text{in } z_2: \begin{cases} M_s = M_d \\ \Delta T = T_d - T_s = -F \end{cases} \quad (1.37)$$

che sono in generale le condizioni in corrispondenza di una forza trasversale concorde all'asse y .

Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_4 , dove è applicata la coppia \mathfrak{M} , si ricava invece (figura 1.47):

$$\text{in } z_4: \begin{cases} \Delta M = M_d - M_s = -\mathfrak{M} \\ T_s = T_d \end{cases} \quad (1.38)$$

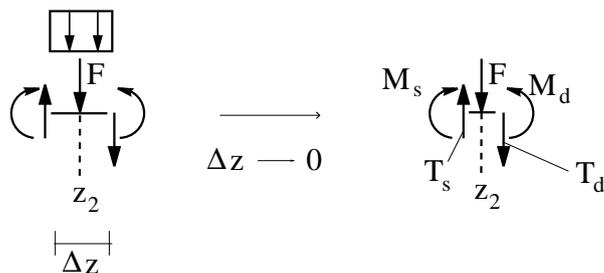


Figura 1.46: Condizioni in z_2 .

che sono in generale le condizioni in corrispondenza di una coppia \mathfrak{M} antioraria.

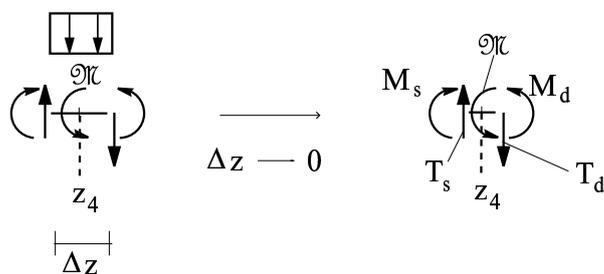


Figura 1.47: Condizioni in z_4 .

Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_6 , dove esiste una discontinuità del carico q ma non vi è alcuna forza concentrata trasversale o coppia applicata, si ricava (figura 1.48):

$$\text{in } z_6: \begin{cases} M_s = M_d \\ T_s = T_d \end{cases} \quad (1.39)$$

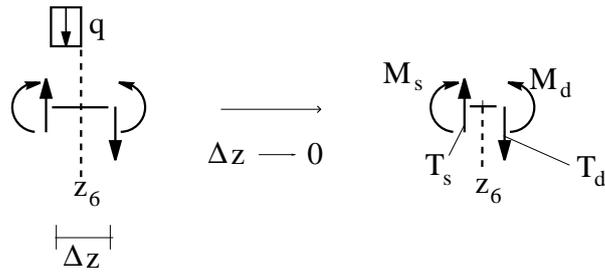
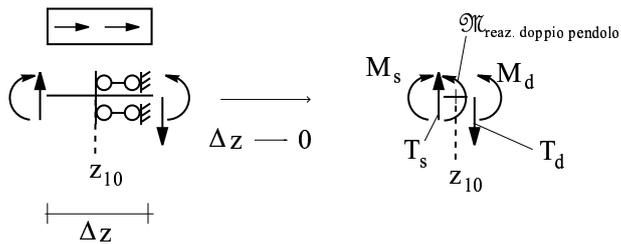
che sono in generale le condizioni di continuità per il momento e per il taglio che sussistono in qualsiasi punto in cui non vi siano forze concentrate trasversali o coppie applicate.

Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_{10} , ovvero del punto di applicazione del doppio pendolo esterno, si ricava (figura 1.49):

$$\text{in } z_{10}: T_s = T_d \quad (1.40)$$

mentre non può scriversi alcuna condizione sul momento in quanto la differenza di momento è legata al coppia reattiva del doppio pendolo che, nel procedimento analitico, va considerata come incognita. La (1.40) è in generale la condizione da scrivere in prossimità di un doppio pendolo avente gli assi dei pendoli paralleli a quello della trave.

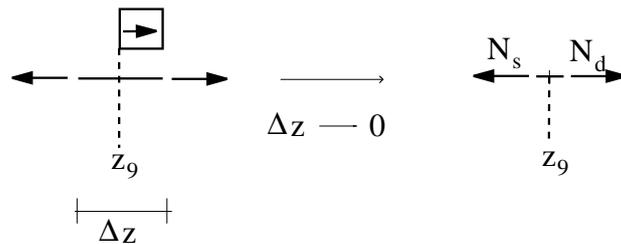
Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_9 , dove esiste una discontinuità del carico assiale p ma non vi è alcuna forza concentrata assiale, si ricava (figura

Figura 1.48: Condizioni in z_6 .Figura 1.49: Condizioni in z_{10} .

1.50):

$$\text{in } z_9: N_s = N_d \quad (1.41)$$

che è in generale la condizione di continuità per lo sforzo normale che sussiste in qualsiasi punto in cui non vi sia una forza concentrata assiale.

Figura 1.50: Condizioni in z_9 .

Le ascisse $z = 5$ e $z = 7$ non rappresentano punti di discontinuità del carico esterno e pertanto non conviene in tali ascisse spezzare ulteriormente il dominio di integrazione. In tali ascisse però vanno scritte le condizioni corrispondenti al vincolo interno ivi presente. In particolare in $z = 5$ (cerniera) il momento è nullo, mentre in $z = 7$ (doppio pendolo interno) è il taglio ad essere nullo.

Considerando anche le altre condizioni analoghe a quelle considerate finora si otten-

gono in definitiva le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 \text{in } z = 0: & \quad N(0) = -H & \quad T(0) = -F & \quad M(0) = -\mathfrak{M} \\
 \text{in } z_1: & \quad M_s = M_d \\
 \text{in } z_2: & \quad \begin{cases} M_s = M_d \\ \Delta T = -F \end{cases} \\
 \text{in } z_3: & \quad M_s = M_d \\
 \text{in } z_4: & \quad \begin{cases} \Delta M = -\mathfrak{M} \\ T_s = T_d \end{cases} \\
 \text{in } z_5: & \quad M = 0 \\
 \text{in } z_6: & \quad \begin{cases} M_s = M_d \\ T_s = T_d \end{cases} \\
 \text{in } z_7: & \quad T = 0 \\
 \text{in } z_8: & \quad M_s = M_d \\
 \text{in } z_9: & \quad N_s = N_d \\
 \text{in } z_{10}: & \quad T_s = T_d \\
 \text{in } z = L: & \quad N(L) = H & \quad T(L) = F & \quad M(L) = \mathfrak{M}
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Nell'esempio considerato non si sono esaurite tutte le possibili condizioni al contorno che può capitare di dover scrivere in altri problemi, ma i ragionamenti svolti consentono, opportunamente combinati tra loro, di affrontare tutti i problemi di statica relativi alle travi ad asse rettilineo.

Quando non si vuole procedere con il procedimento analitico di integrazione delle equazioni differenziali, ma bensì si calcolano preliminarmente le reazioni vincolari e quindi si determinano le caratteristiche della sollecitazione in ogni sezione mediante il principio di sezionamento, le considerazioni svolte in questa sezione sono comunque di grande aiuto come strumento di verifica. Infatti, una volta note le reazioni vincolari, si può riguardare la travatura in esame quale una struttura priva di vincoli e soggetta solamente a carichi noti. Vale pertanto quanto segue:

- Su un estremo di una trave lo sforzo normale è pari in modulo alla componente assiale della forza ivi applicata (attiva o reattiva che sia); lo sforzo di taglio è pari in modulo alla componente trasversale della forza ivi applicata (attiva o reattiva che sia); il momento flettente è pari in modulo alla coppia ivi applicata (attiva

o reattiva che sia). I segni si determinano vedendo l'estremo della trave quale faccia destra o sinistra di un taglio e le azioni ivi applicate direttamente quali caratteristiche della sollecitazione, e utilizzando le convenzioni solite per i segni di queste ultime.

- Conseguenza ovvia di quanto sopra detto è che su un estremo di una trave lo sforzo normale è nullo se è nulla la componente assiale della forza ivi applicata (attiva o reattiva che sia); lo sforzo di taglio è nullo se è nulla la componente trasversale della forza ivi applicata (attiva o reattiva che sia); il momento flettente è nullo se è nulla la coppia ivi applicata (attiva o reattiva che sia).
- Una forza trasversale F applicata sulla trave corrisponde sempre ad un salto $\Delta T = -F$, avendo assunto F positiva se diretta secondo l'asse y . Graficamente nel diagramma del taglio ciò si traduce in un salto di modulo pari e nello stesso verso della forza stessa.
- Una coppia \mathfrak{M} applicata sulla trave corrisponde sempre ad un salto $\Delta M = -\mathfrak{M}$, avendo assunto \mathfrak{M} positiva se antioraria. Graficamente nel diagramma del momento ciò si traduce in un salto, discorde a y (cioè verso l'alto nel caso di trave orizzontale con y diretto verso il basso, come si è fatto solitamente) se la coppia è antioraria, e concorde a y se la coppia è oraria, e pari in modulo a quello della coppia stessa.
- Una forza assiale H applicata sulla trave corrisponde sempre ad un salto $\Delta N = -H$, avendo assunto H positiva se diretta secondo l'asse z .

In virtù delle convenzioni fatte ulteriori verifiche sul tracciamento dei diagrammi del taglio e del momento possono farsi tenendo conto di quanto segue:

- In corrispondenza di un carico distribuito la curvatura del diagramma del momento ha lo stesso verso di quella che avrebbe la configurazione deformata di un filo soggetto allo stesso carico.
- In corrispondenza di una forza trasversale concentrata il diagramma del momento presenta una cuspidè dello stesso verso di quella che caratterizzerebbe la configurazione deformata di un filo soggetto alla stessa forza.
- In corrispondenza di una cerniera non caricata né a destra né a sinistra da una coppia il momento è nullo⁹.
- In corrispondenza di un doppio pendolo interno non caricato né a destra né a sinistra da una forza il taglio è nullo.
- In ogni punto in cui il taglio è nullo il diagramma del momento è stazionario, cioè ha la tangente parallela alla fondamentale, quindi orizzontale nel caso di trave ad asse rettilineo orizzontale.

⁹I casi di una cerniera e di un doppio pendolo interno caricati si prenderanno in esame nel seguito.

1.4.5 Esercizi sulle travi ad asse rettilineo orizzontale

Negli esercizi che seguono si tracciano i diagrammi del momento e del taglio per alcune travi isostatiche ad asse rettilineo calcolando preliminarmente le reazioni vincolari e quindi utilizzando nel modo più conveniente sia il principio di sezionamento che le informazioni che si possono ottenere in base all'integrazione indefinita delle (1.24). Gli esercizi 1-14 servono anche a studiare i casi di vincoli interni caricati da forze o da coppie.

Problema 1

Si consideri la trave di figura 1.51.

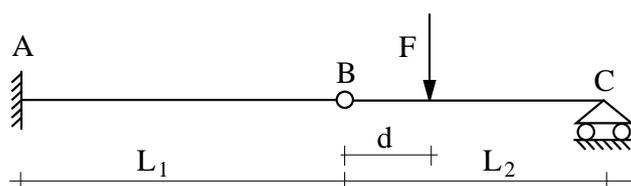


Figura 1.51: Problema 1: geometria, vincoli e carichi.

Per il calcolo delle reazioni vincolari conviene partire dall'equilibrio del tratto BC . Scrivendo le tre equazioni cardinali della statica per tale tratto si ottengono i valori della reazione della cerniera interna in B sul tratto BC e del carrello in C riportati in figura 1.52.

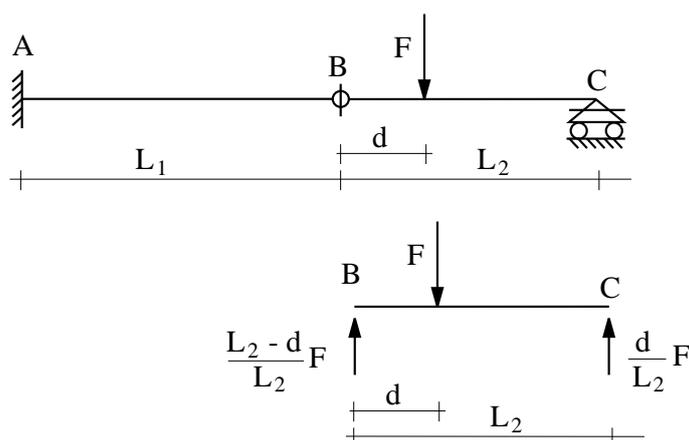


Figura 1.52: Equilibrio del tratto BC .

Nota la reazione della cerniera in B sul tratto BC , essendo la cerniera non caricata la sua reazione sul tratto AB è quella uguale e contraria e quindi è anch'essa nota.

Nell'equilibrio del tratto AB rimangono dunque solo tre incognite che possono essere determinate con le tre equazioni cardinali della statica. I loro valori sono stati riportati in figura 1.53. I valori delle reazioni dei vincoli esterni ed interni ottenuti per tutta la trave sono stati riportati in figura 1.54.

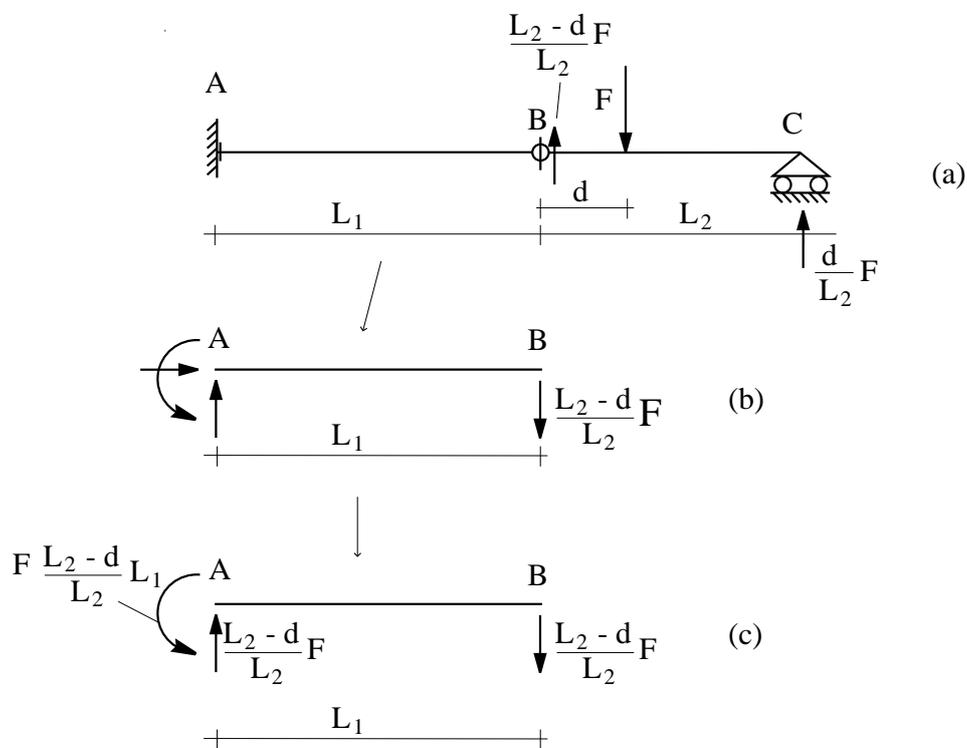


Figura 1.53: Equilibrio del tratto AB .

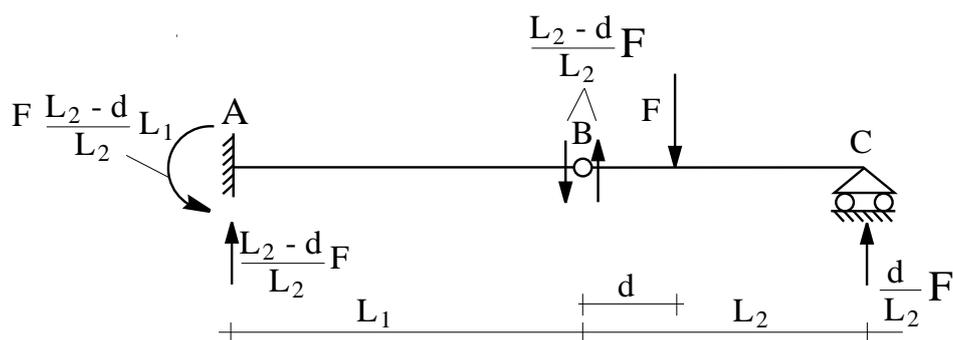


Figura 1.54: Reazioni dei vincoli esterni ed interni.

Per il tracciamento dei diagrammi della sollecitazione interna si osserva preliminarmente che, non essendo presente alcuna componente assiale delle forze attive e reattive, lo sforzo normale è identicamente nullo. Per calcolare il momento flettente ed il taglio

nel tratto tra la forza F e la sezione C si considera una sezione generica S compresa in tale tratto, ad una distanza a da C . Si impone dunque l'equilibrio del tratto SC . A tale scopo si seziona in S ed in C (figura 1.55.a) e, non essendovi azioni esterne direttamente applicate, le uniche azioni presenti sono la reazione del vincolo esterno in C , che è nota, e le caratteristiche della sollecitazione in S .

Per calcolare il momento in S si scrive dunque un'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a S . In tale equazione lo sforzo normale (comunque nullo in questo caso) ed il taglio non intervengono in quanto per definizione passanti per S e per tale motivo sono stati riportati in grigio in figura 1.55.b. Si ottiene il valore del momento $M_S = \frac{F}{L_2} d a$, da cui si deduce che il momento varia linearmente tra S e C annullandosi in C . Circa il segno del momento, esso è positivo in quanto sulla faccia destra del taglio in S è una coppia oraria. Pertanto, assumendo l'asse della trave come fondamentale e avendo assunto per convenzione di riportare il diagramma del momento concordemente ad y se positivo, cioè verso il basso in questo caso, si ricava il diagramma nel tratto SC riportato in figura 1.55.c.

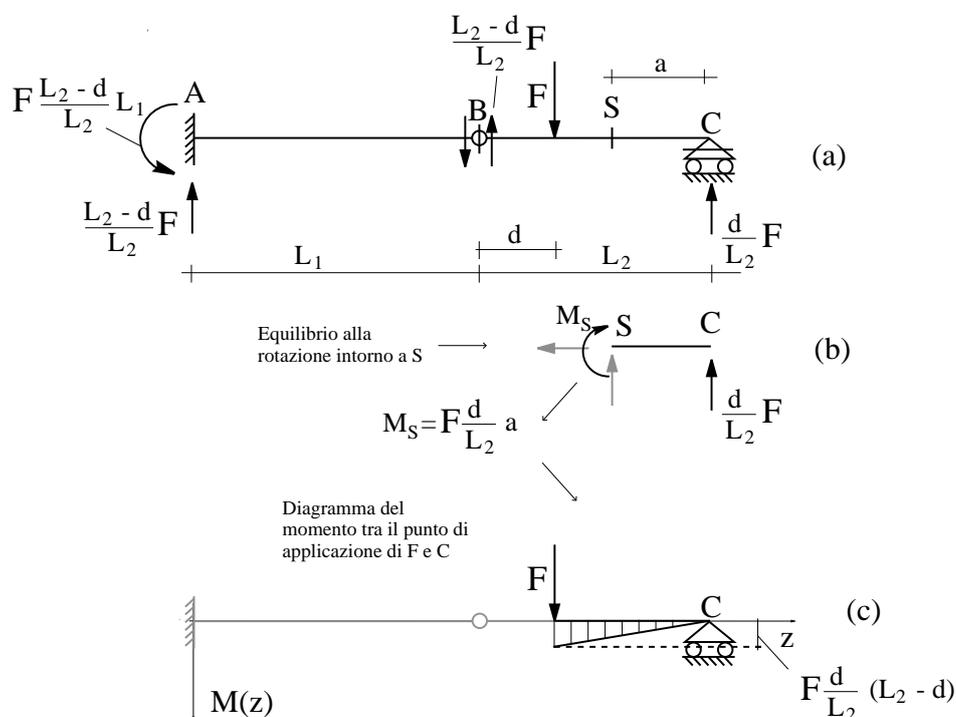


Figura 1.55: Calcolo del momento nel tratto tra la forza F ed il punto C .

Analogamente, per calcolare il taglio in S si scrive un'equazione di equilibrio alla traslazione verticale per il tratto SC . In tale equazione lo sforzo normale ed il momento flettente non intervengono e per tale motivo sono stati riportati in grigio in figura 1.56.b. Si ottiene il valore del taglio $T_S = -\frac{F}{L_2} d$, da cui si deduce che il taglio non dipende da a , cioè è costante tra S e C . Esso è negativo in quanto sulla faccia destra del taglio in S è una forza discorde a y . Pertanto, assumendo l'asse della trave come fondamentale e avendo assunto per convenzione di riportare il diagramma del taglio discorde ad y se

positivo, cioè verso l'alto in questo caso, si ricava il diagramma nel tratto SC riportato in figura 1.56.c.

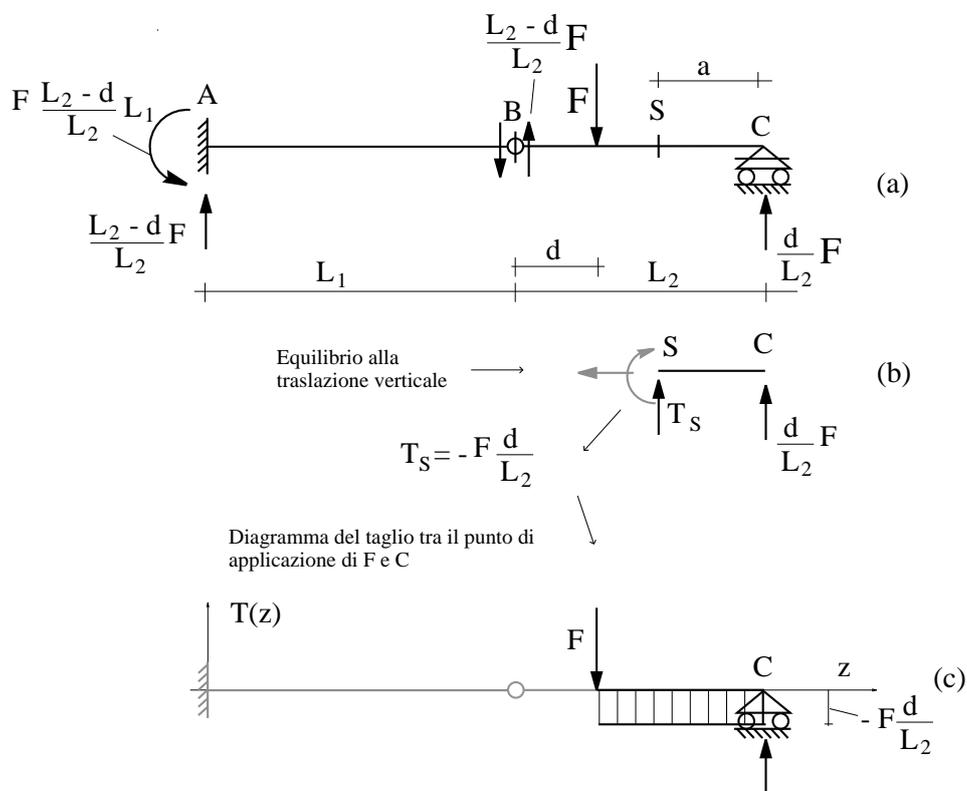


Figura 1.56: Calcolo del taglio nel tratto tra la forza F ed il punto C .

Per il calcolo del momento tra B e la forza F si considera una sezione generica S' in tale tratto ad una distanza a' da B e si impone l'equilibrio del tratto BS' (figura 1.57.a-b). Non essendoci forze attive su BS' , bisogna solo considerare la reazione interna in B , nota, e le tre caratteristiche della sollecitazione in S' . Si ricava dunque: $M_{S'} = \frac{L_2 - d}{L_2} F a'$, che come momento flettente è positivo perché è una coppia antioraria agente sulla faccia sinistra del taglio in S' . Si usa anche dire, con una dizione non estremamente precisa ma indubbiamente efficace, che guardando le forze alla sinistra di S' 'la forza che produce il momento' è la reazione di B su BC .

Allo stesso risultato si perviene se si impone l'equilibrio del tratto $S'C$ (figura 1.57.c) dove le forze agenti, oltre alle caratteristiche della sollecitazione in S' , ora però applicate sulla faccia destra del taglio, vi sono la reazione in C e la forza F . Ma per l'equilibrio del tratto BC , la forza F , la reazione di B su BC e la reazione in C costituiscono un sistema equivalente a zero. Pertanto il sistema costituito dalla forza F e dalla reazione in C è equivalente all'opposto della reazione di B su BC . Si può dire dunque che, guardando le forze alla destra di S' , 'la forza che produce il momento' è l'opposto della reazione di B su BC . La coppia che agisce sulla faccia destra del taglio in S' per equilibrare il momento dell'opposto della reazione di B su BC deve pertanto essere uguale ed opposta di quella che agisce sulla faccia sinistra del taglio in S' per equilibrare

la reazione di B su BC . Ma tali coppie, uguali ed opposte, come momento flettente coincidono in segno e in questo caso corrispondono ad un momento positivo.

Si è anche trovato che il momento in B è lineare rispetto ad a' e dunque si annulla in B ed evidentemente assume il valore massimo dove è applicata F , dove il momento deve essere continuo per cui i limiti sinistro e destro devono coincidere. Si ottiene anche la cuspidale che ci si doveva aspettare in corrispondenza della forza F (figura 1.57.d).

La linearità del diagramma del momento tra B e la forza F , e tra F e C , si ricava anche dal fatto che in tali tratti il carico distribuito q è nullo. Per lo stesso motivo, essendo q nullo anche fra A e B , il diagramma del momento continua linearmente anche in tale tratto. Inoltre, non essendoci forze o coppie concentrate in corrispondenza della cerniera in B , né in alcun altro punto di AB , il diagramma in AB si ottiene prolungando a tale tratto la funzione lineare ottenuta sul tratto tra B ed F . Si ottiene in definitiva il diagramma riportato in figura 1.57.e.

Per il calcolo del taglio tra B e la forza F si procede in modo perfettamente analogo a quanto fatto per il momento, imponendo però l'equilibrio alla traslazione verticale del tratto BS' o equivalentemente del tratto $S'C$, al posto di quello alla rotazione intorno a S' (figura 1.58.a-c). Si ottiene così che il taglio in S' è costante tra B e la forza F e tra questa e C , mentre in corrispondenza di F si ritrova il salto verso il basso pari in modulo proprio a F , così come ci si aspettava (figura 1.58.d).

L'andamento costante del diagramma del taglio tra B e la forza F , e tra F e C , si ricava anche dal fatto che in tali tratti il carico distribuito q è nullo. Per lo stesso motivo, essendo q nullo anche fra A e B , il diagramma del taglio continua costante anche in tale tratto. Inoltre, non essendoci forze concentrate in corrispondenza della cerniera in B , né in alcun altro punto di AB , il diagramma in AB si ottiene prolungando a tale tratto la funzione costante ottenuta sul tratto tra B ed F . Si ottiene in definitiva il diagramma riportato in figura 1.58.e.

Problemi 2-4

Il calcolo delle reazioni ed il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche per i problemi 2-4, riportati di seguito si lascia come esercizio (ovviamente non si sono riportati i diagrammi delle caratteristiche quando sono identicamente nulli).

Problema 5

Facendo tendere a zero la distanza d della forza dalla cerniera in B nei problemi 1 e 2 si osserva che sia le reazioni vincolari che i diagrammi delle caratteristiche tendono alla stessa soluzione. Ciò vuol dire che è possibile applicare una forza concentrata giusto sulla cerniera senza dover specificare se la forza va messa 'immediatamente' a destra o a sinistra. D'altra parte le forze e coppie non sono enti fisicamente misurabili, ma vanno piuttosto visti come enti matematici che possono compiere lavoro per spostamenti e rotazioni dei loro punti di applicazione. Pertanto una forza applicata in una sezione delle trave è un ente che compie lavoro per l'eventuale spostamento della sezione stessa. Nella cerniera lo spostamento è continuo, nel senso che i limiti destro e sinistro coincidono con quello che può univocamente definirsi lo spostamento della cerniera, pertanto ha senso applicare la forza direttamente sulla cerniera.

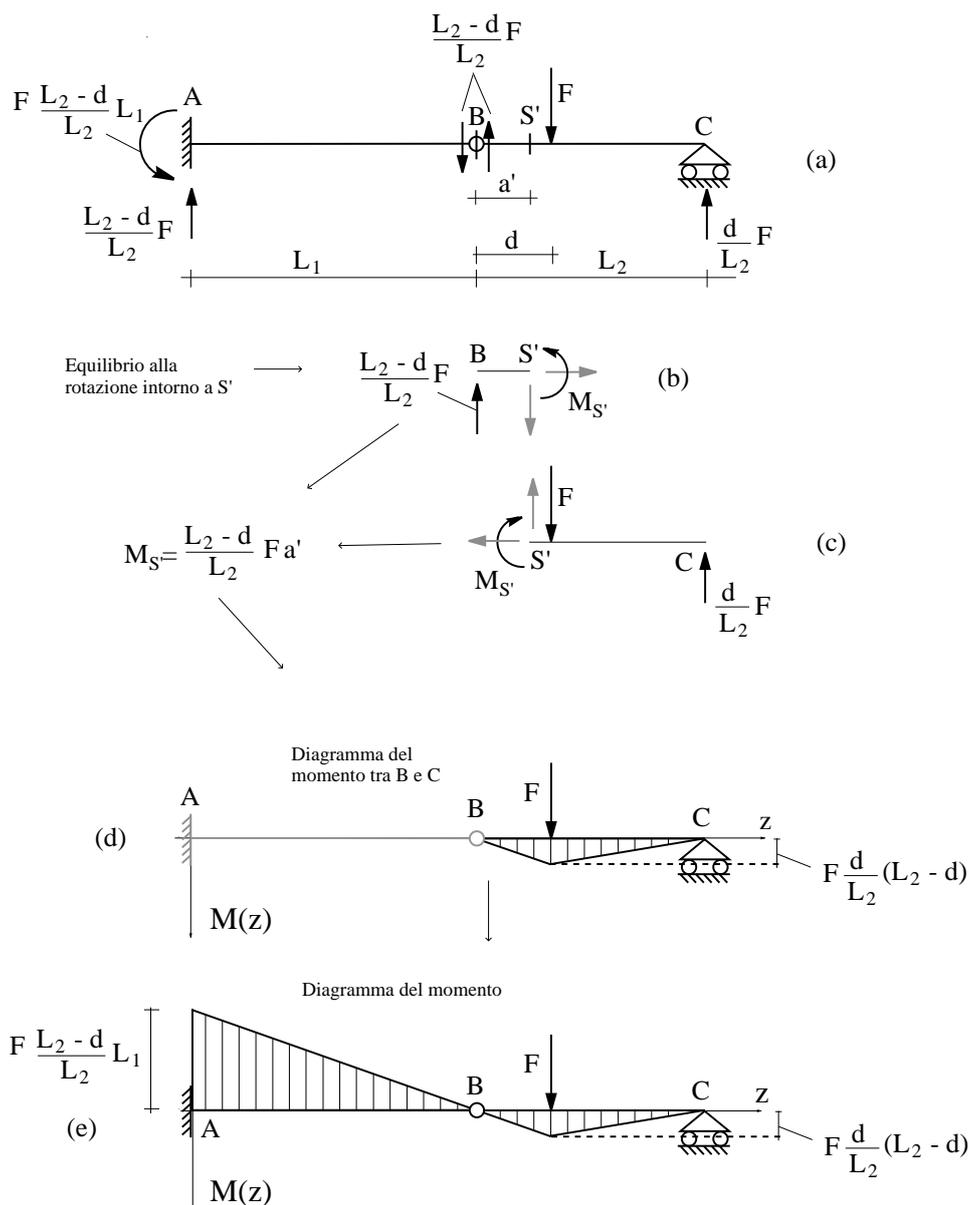


Figura 1.57: Calcolo del momento nel tratto tra A e la forza F e tracciamento del diagramma del momento completo.

La soluzione che si ottiene negli esercizi 1 e 2 al limite per $d \rightarrow 0$ si può anche ricercare direttamente considerando il problema 5 di figura 1.62.

La differenza rispetto ai problemi già risolti finora consiste nel fatto che, essendo la cerniera caricata con una forza verticale, le due reazioni che essa esplica sui tratti AB e BC non sono più uguali ed opposte. Pertanto, quando si considera l'equilibrio del tratto BC , nell'effettuare il taglio in B bisogna specificare se tale taglio lo si effettua alla sinistra o alla destra della cerniera, che è anche il punto di applicazione della forza F . Ciò è evidente anche considerando che, in generale, nel punto di applicazione di

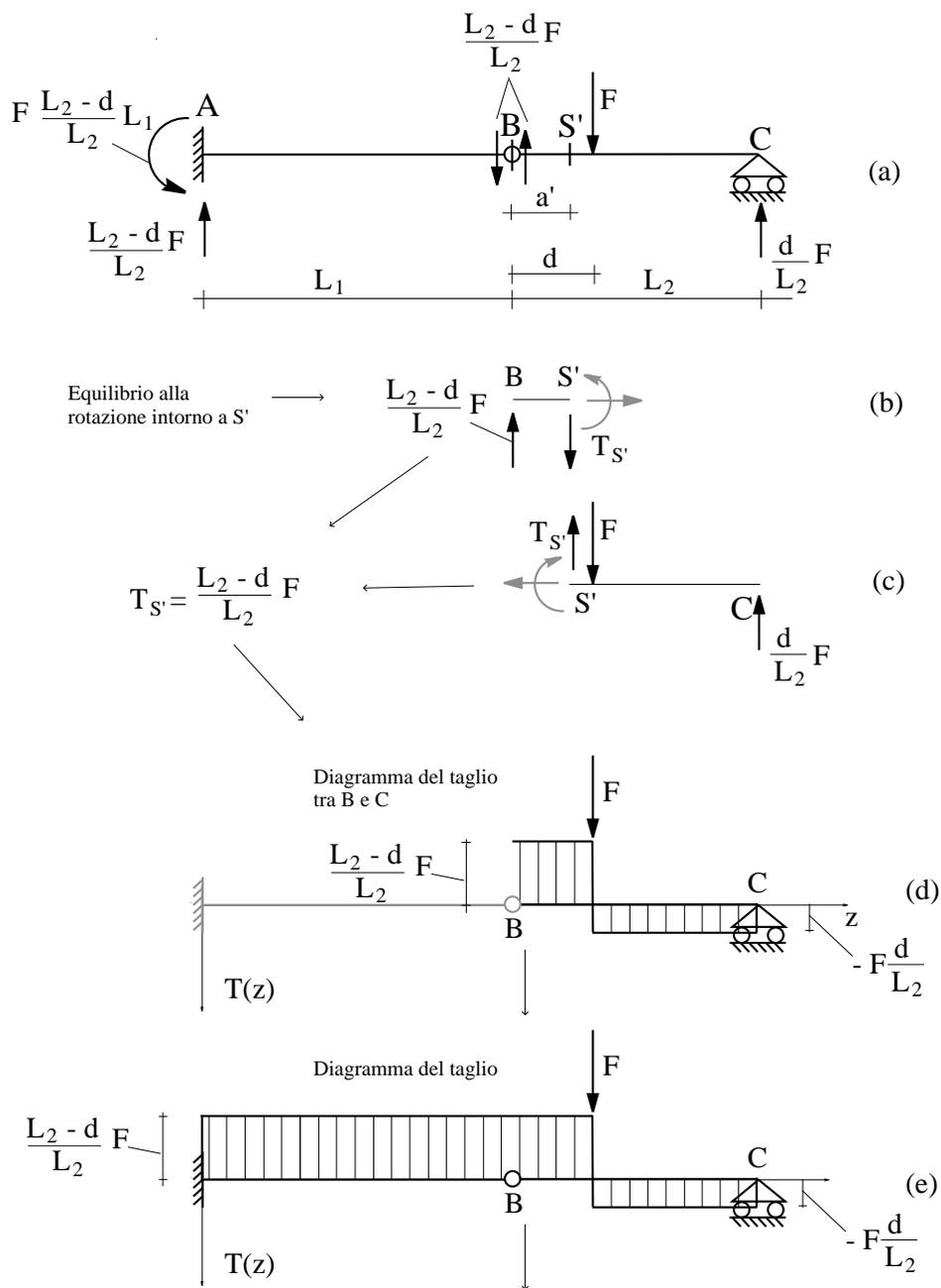


Figura 1.58: Calcolo del taglio nel tratto tra A e la forza F e tracciamento del diagramma del taglio completo.

una forza il taglio non è definito in modo univoco in quanto presenta una discontinuità, mentre sono definiti i suoi limiti sinistro e destro. Pertanto, quando si effettua un taglio e si sostituisce nella sezione in cui si è effettuato il taglio le caratteristiche della sollecitazione agenti sulle due facce del taglio, è necessario specificare quale dei due limiti della funzione taglio si considera, cioè in parole semplici ma efficaci, se si taglia 'a sinistra' o 'a destra' della forza, che in questo caso è applicata proprio sulla cerniera.

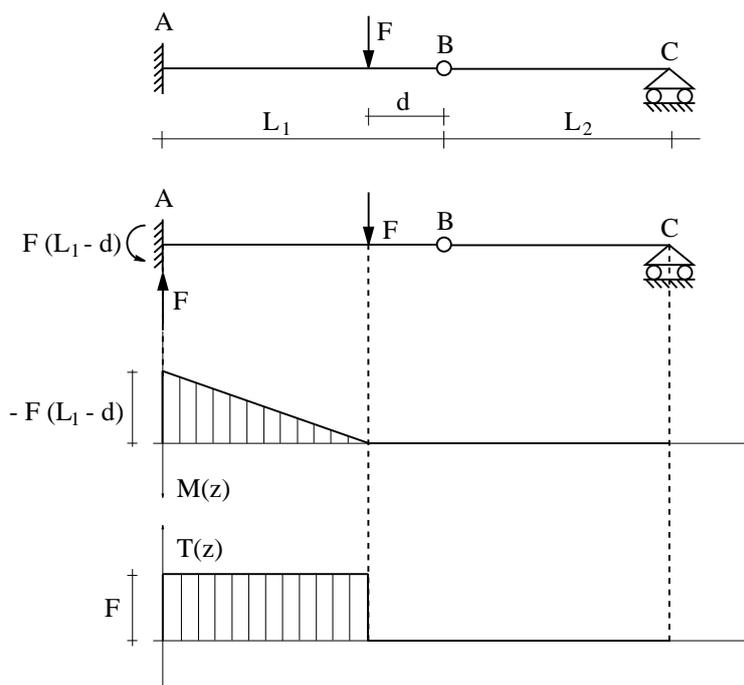


Figura 1.59: Problema 2: reazioni e diagrammi del momento e del taglio.

Per il problema 5 si è allora proceduto tagliando dapprima ‘immediatamente a destra’ di B nella sezione che si indicherà con B_d , imponendo l’equilibrio del tratto B_dC e ricavando reazioni in B_d ed in C tutte nulle. Si sottolinea che il termine ‘immediatamente’ sta ad indicare sinteticamente il seguente procedimento al limite:

- Si seziona in una sezione $B_{d,\Delta z}$ ad una distanza Δz da B , sostituendo sulle due facce sinistra e destra del taglio le tre caratteristiche incognite della sollecitazione.
- Si fa tendere Δz a zero e si tiene conto del fatto che le caratteristiche della sollecitazione tendono, per definizione di vincolo interno, alle interazioni trasmesse dalla cerniera in B . Tali interazioni sono costituite solamente da due forze aventi una qualsiasi retta d’azione passante per B . Se ne deduce che al tendere a zero di Δz il momento deve anch’esso tendere a zero. Pertanto, al limite, le interazioni in B_d sono pari alle reazioni della cerniera in B su BC ovvero, in generale, una forza verticale ed una orizzontale.

Note le interazioni in B_d si è imposto l’equilibrio dell’intorno elementare della cerniera in B , tagliando ‘immediatamente a sinistra’ in B_s ed ‘immediatamente a destra’ di B in B_d ed imponendo l’equilibrio del tratto B_sB_d . Si è ricavato che sulla faccia destra di B_s agisce una reazione F verso l’alto per equilibrare la forza esterna F verso il basso. Sulla faccia sinistra di B_s agisce allora una forza verticale F verso il basso e quindi, imponendo l’equilibrio del tratto AB_s si sono ricavate le ultime reazioni vincolari incognite in A . L’intero procedimento è riportato nella figura 1.62.

Note le reazioni vincolari esterne ed interne i diagrammi delle sollecitazioni sono facilmente ricavabili e sono riportati in figura 1.63.

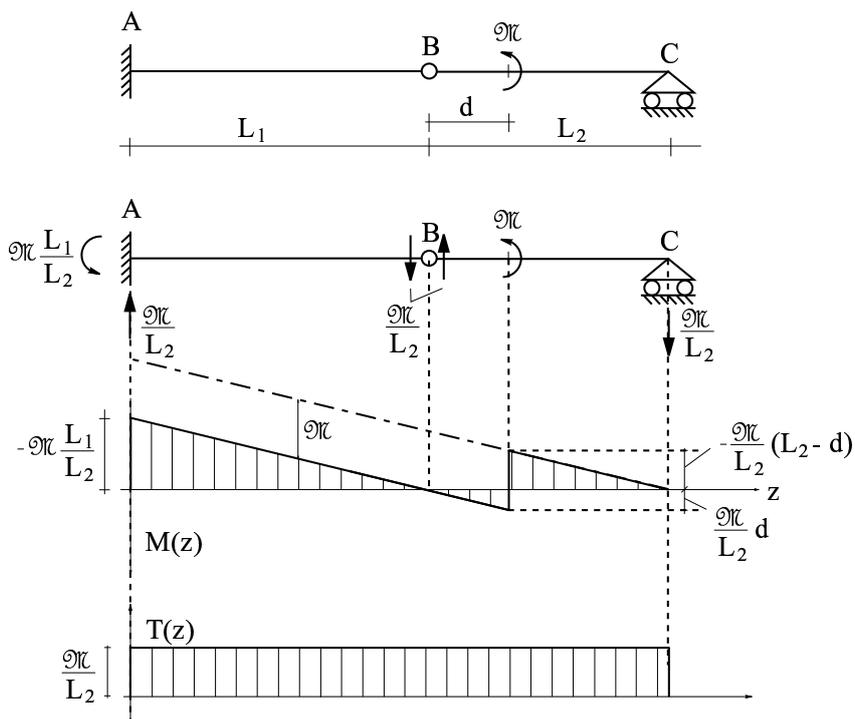


Figura 1.60: Problema 3: reazioni e diagrammi del momento e del taglio.

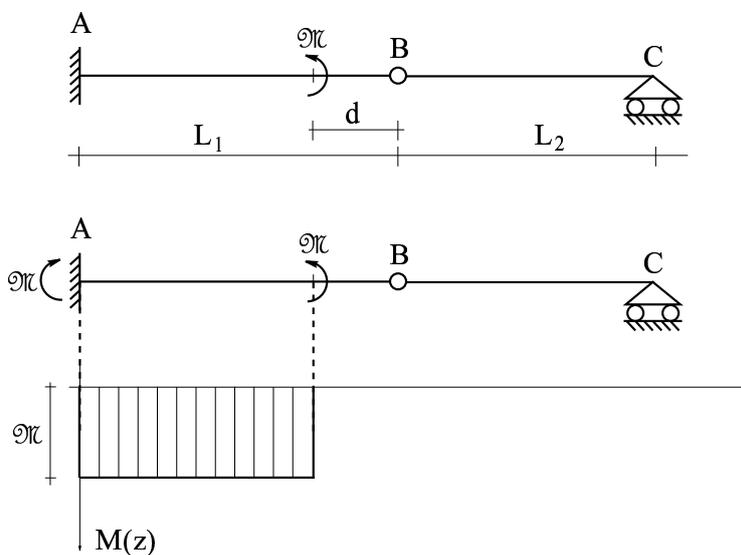


Figura 1.61: Problema 4: reazioni e diagramma del momento.

Problemi 6-7

Al tendere a zero della distanza d nei problemi 3 e 4 si ottengono due soluzioni diverse, riportate nelle due figure 1.65 e 1.66. Ciò significa che quando si vuole applicare la

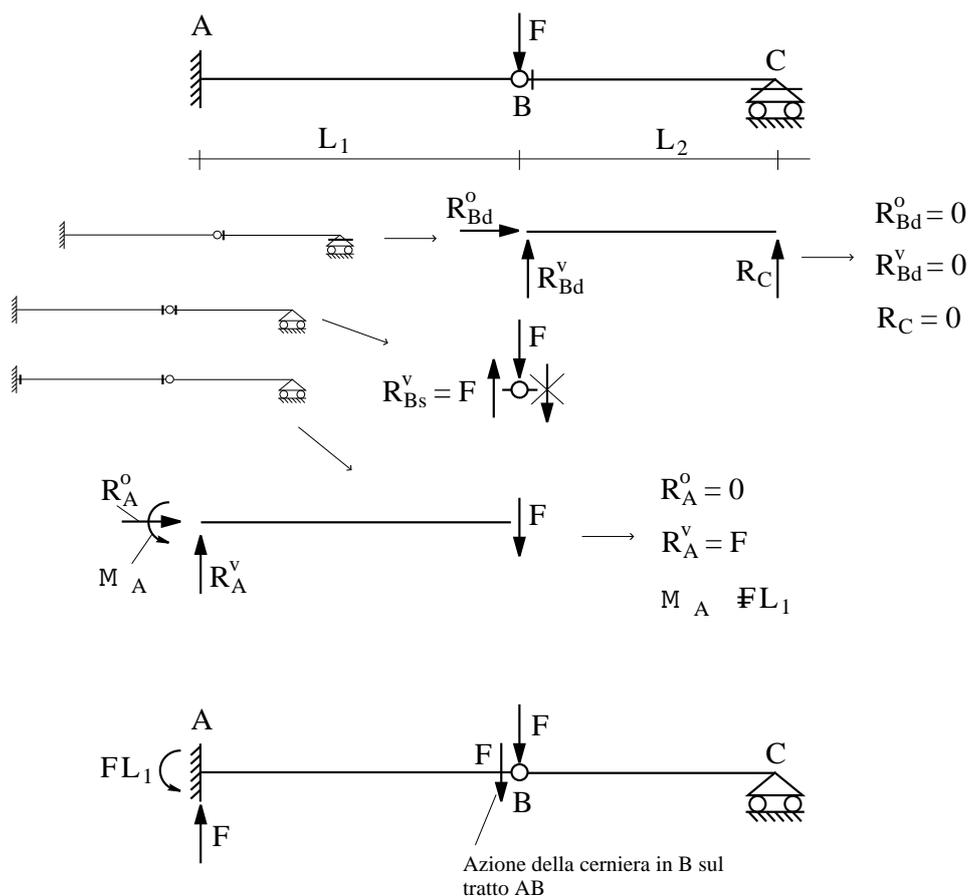


Figura 1.62: Problema 5: determinazione delle reazioni vincolari.

coppia in prossimità di una cerniera è necessario specificare se tale coppia va applicata a sinistra o a destra, mentre non ha senso applicare la coppia ‘proprio sulla cerniera’. Ciò è perfettamente in accordo con il fatto che la coppia è un ente che compie lavoro per la rotazione della sezione in cui essa è applicata, e che la rotazione non è una funzione continua sulla cerniera mentre esistono i suoi due limiti sinistro e destro, ovvero le rotazioni a sinistra ed a destra della cerniera.

Si sottolinea che per ricavare le soluzioni dei problemi 6 ed 7 conviene, almeno nella fase di iniziale apprendimento delle tecniche risolutive dei problemi di statica, risolvere i problemi 3 e 4 effettuando immediatamente, nella fase di calcolo delle reazioni vincolari, il limite per d tendente a 0.

Problemi 8-14

Si è visto che su una cerniera ha senso applicare una forza senza specificare se essa agisce a sinistra o a destra, mentre non ha senso applicare una coppia senza specificare se essa agisce a sinistra o a destra. Analogamente su un doppio pendolo (su un pattino) interno ha senso applicare una coppia senza specificare se essa agisce a sinistra o a destra, mentre non ha senso applicare una forza trasversale senza specificare se essa agisce

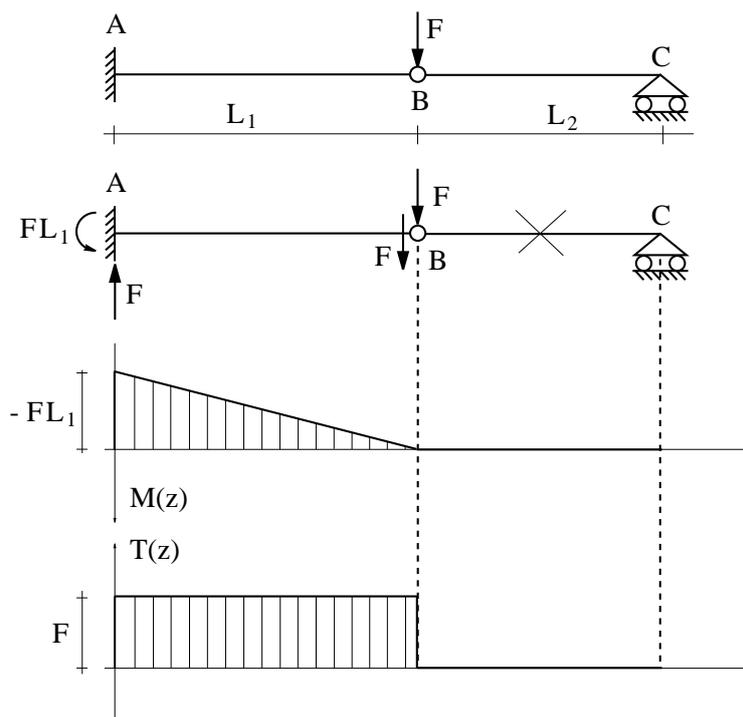


Figura 1.63: Problema 5: diagrammi del momento e del taglio.

a sinistra o a destra. Ciò perché sul doppio pendolo la rotazione, per cui compie lavoro la coppia, è continua mentre lo spostamento ortogonale agli assi del doppio pendolo (parallelo ai piatti del pattino), per cui compie lavoro la forza trasversale è discontinuo.

Tutti i ragionamenti svolti per i problemi 1-7 si possono svolgere in maniera perfettamente analoga per i problemi 8-14 la cui soluzione è riportata nelle figure 1.66-1.72 e si lascia come esercizio.

Problema 15

I diagrammi del momento e del taglio su una trave appoggiata-appoggiata soggetta ad un carico uniformemente distribuito sono riportati in figura 1.73. Si consiglia come esercizio di ricavare la soluzione sia risolvendo per via analitica le (1.24) aggiungendo le condizioni al contorno $M(0) = M(L) = 0$, sia partendo dal calcolo delle reazioni vincolari, già riportate in precedenza nell'esempio di figura 1.28 e procedendo mediante il principio di sezionamento.

Problema 16

Per determinare le reazioni vincolari ed i diagrammi delle caratteristiche per il problema di figura 1.74 conviene preliminarmente sostituire al carico uniformemente distribuito la sua risultante disposta sul suo asse centrale, ovvero nella mezzeria del carico. Per tale schema 'ausiliario' si determinano dunque le reazioni ed i diagrammi del momento

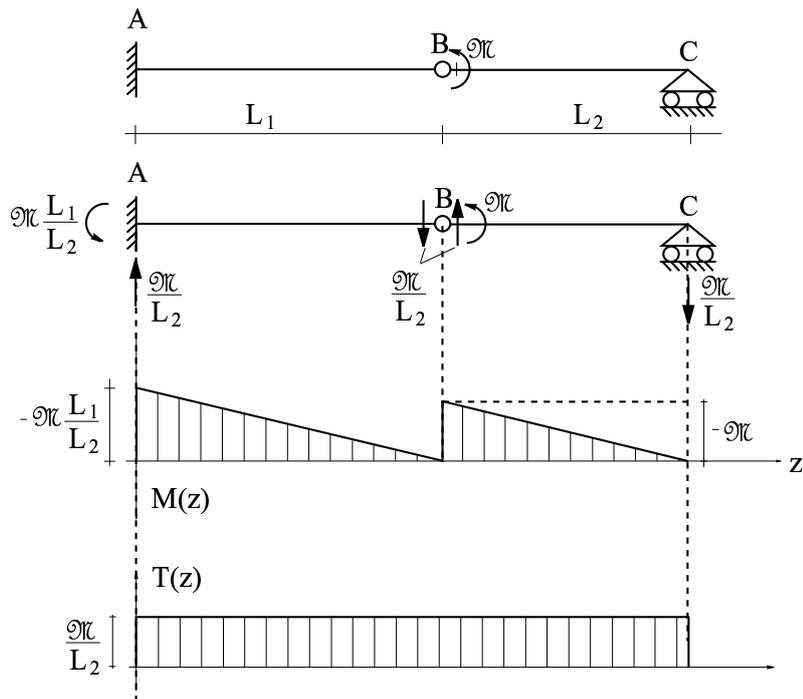


Figura 1.64: Problema 6: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

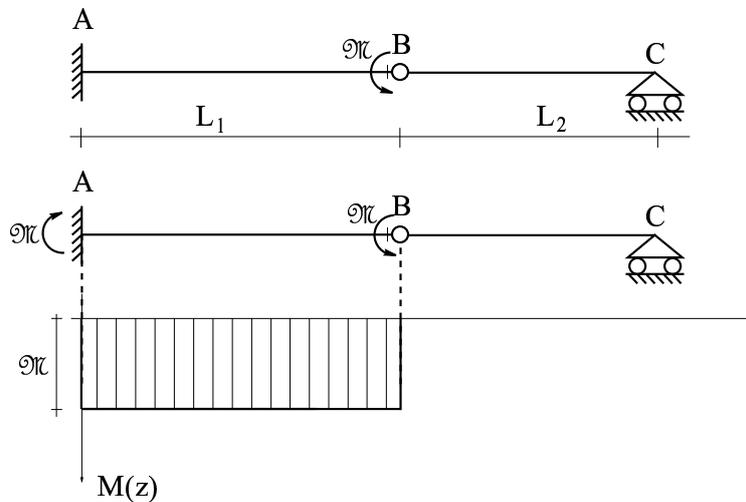


Figura 1.65: Problema 7: reazioni vincolari e diagramma del momento.

e del taglio, che sono riportati in figura 1.75. I diagrammi così ottenuti sono quelli del problema reale in tutti i punti esterni al tratto in cui è presente il carico distribuito.

Per verificare quest'ultima affermazione basta considerare innanzitutto che ai fini del calcolo delle reazioni vincolari il carico interviene nelle equazioni cardinali della statica attraverso la sua risultante ed il suo momento risultante, per cui al carico si può

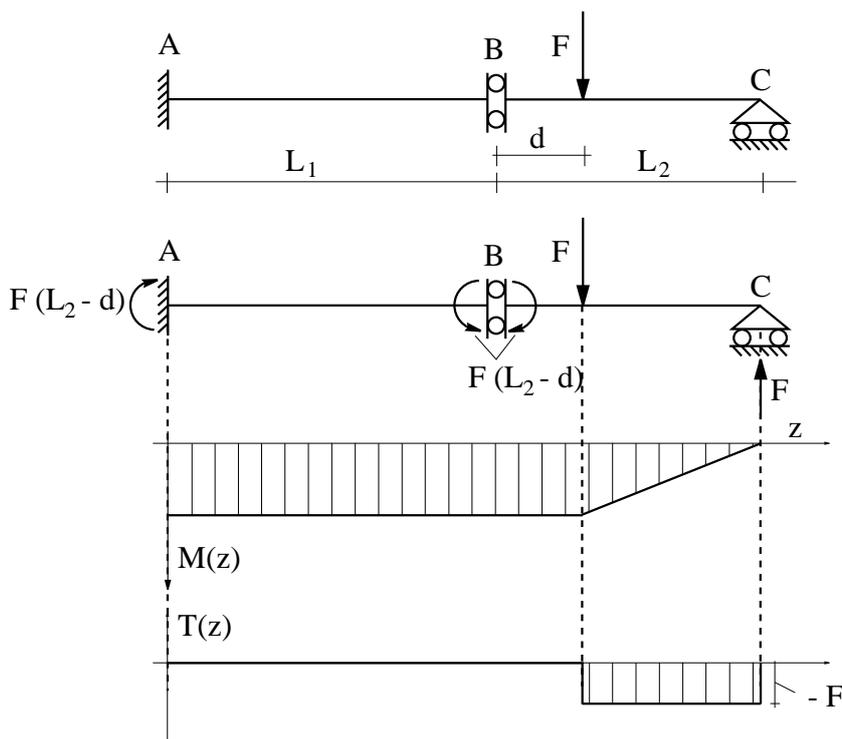


Figura 1.66: Problema 8: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

sostituire un qualsiasi sistema staticamente equivalente tra cui quello costituito dalla sua risultante applicata in mezzeria. Quindi si osserva che per calcolare le caratteristiche della sollecitazione in un punto qualsiasi esterno alla zona di applicazione del carico, per esempio nella sezione S in figura 1.75, si può imporre equivalentemente l'equilibrio dei tratti AS o SB . Nel primo caso il carico non interviene affatto, mentre nel secondo caso sul tratto SB agisce tutto il carico che quindi, nella scrittura delle equazioni di equilibrio del tratto, può essere sostituito con la sua risultante in mezzeria. Tutto ciò vale anche per i due punti C e D estremi dell'intervallo di applicazione del carico, dove i valori del momento e del taglio calcolati in figura 1.75 sono dunque esatti. In particolare, se sono esatti i valori del taglio sono evidentemente esatte anche le tangenti al diagramma del momento.

Nei punti interni a CD invece i diagrammi di figura 1.75 sono evidentemente 'falsi' e per questo motivo sono stati disegnati in grigio. Considerando infatti la sezione S' all'interno di CD ed imponendo l'equilibrio del tratto AS' , nel problema reale bisogna considerare, per l'equazione di equilibrio, solamente la parte di carico agente su CS' , ed è dunque sbagliato sostituire questa parte di carico con la risultante di tutto il carico.

Poiché i valori dei momenti in C e D sono esatti, così come le tangenti al diagramma in tali punti, e poiché la funzione momento è parabolica in presenza di un carico uniformemente distribuito, il diagramma del momento reale si ottiene semplicemente interpolando la parabola tra i valori e le tangenti in C e D . Analogamente, sapendo che il diagramma del taglio è lineare tra C e D , per ricavare il diagramma del taglio a partire

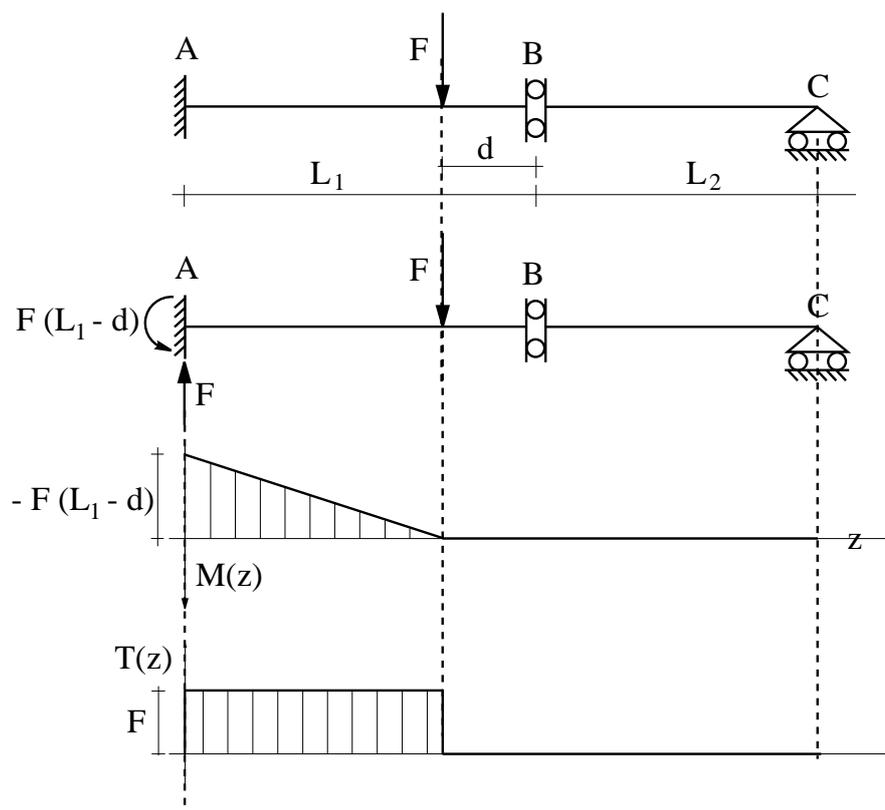


Figura 1.67: Problema 9: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

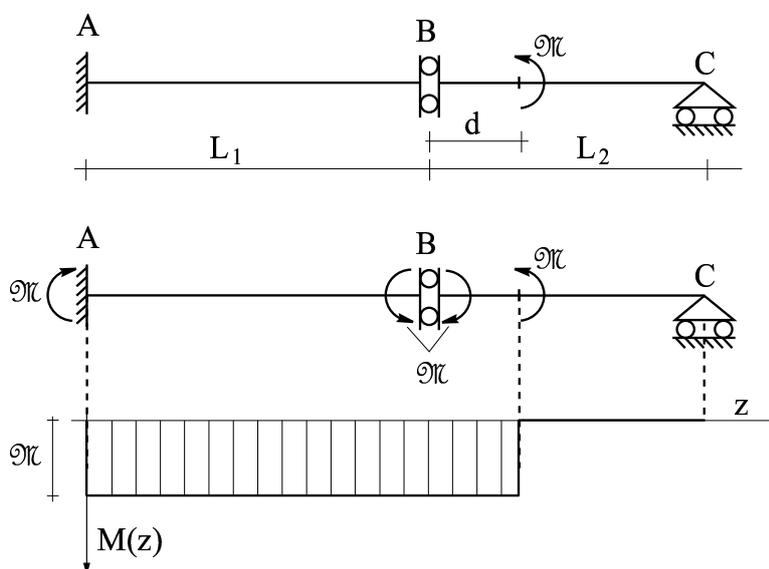


Figura 1.68: Problema 10: reazioni vincolari e diagramma del momento.

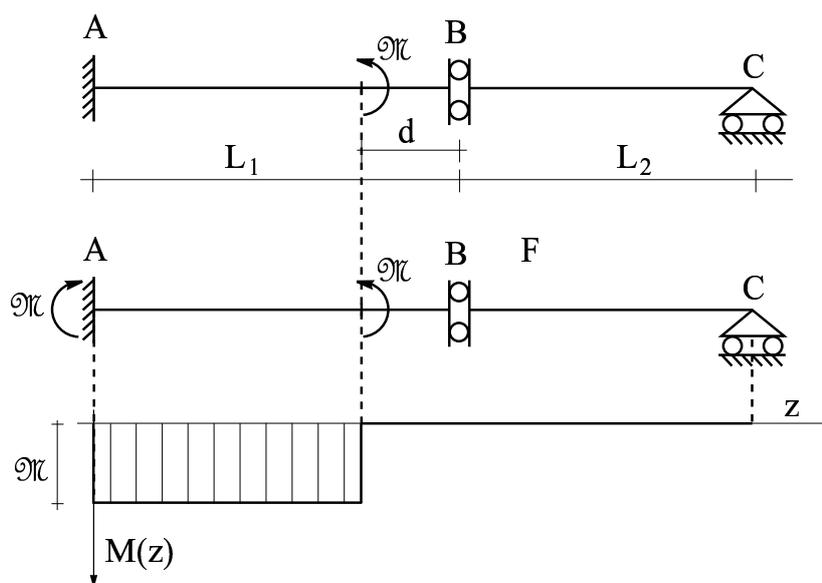


Figura 1.69: Problema 11: reazioni vincolari e diagramma del momento.

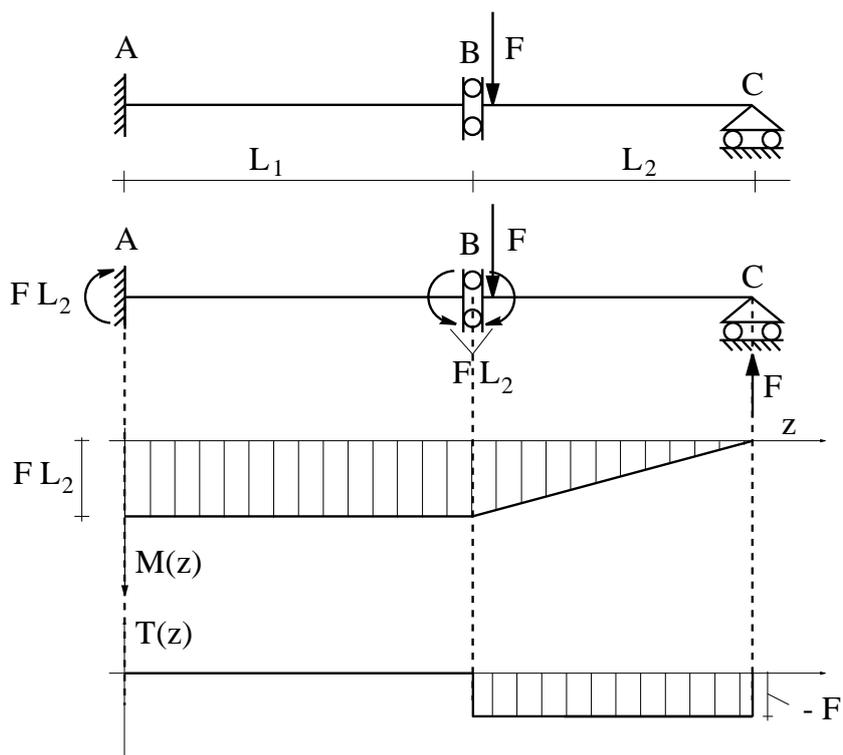


Figura 1.70: Problema 12: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

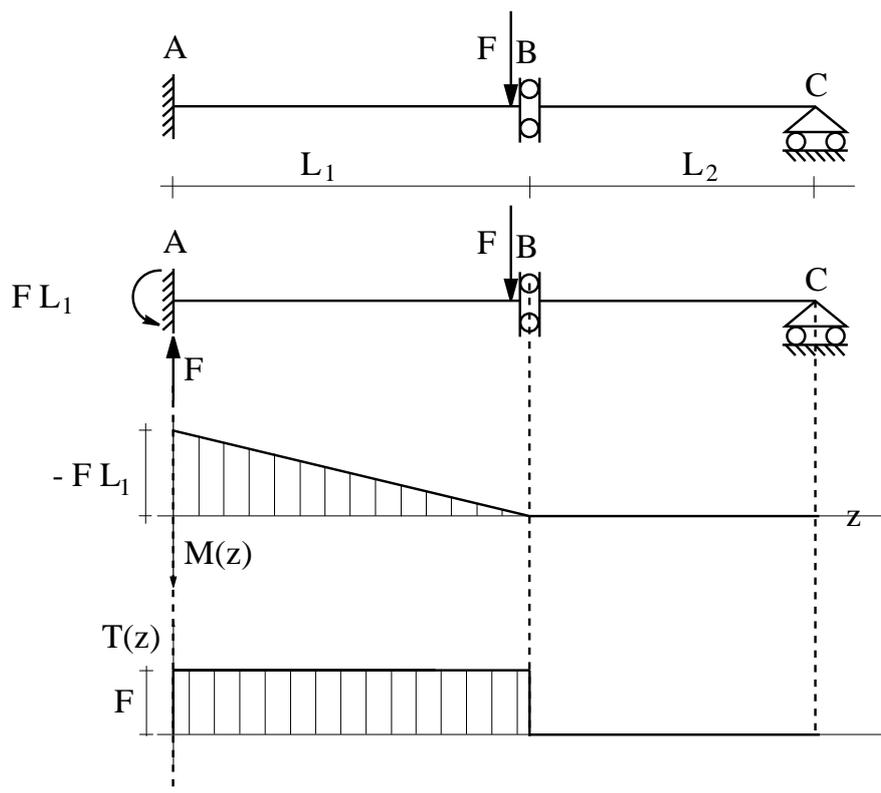


Figura 1.71: Problema 13: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

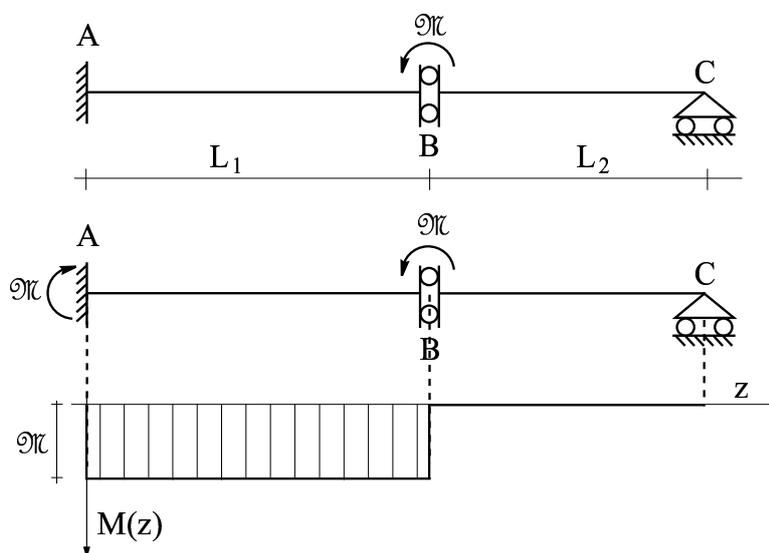


Figura 1.72: Problema 14: reazioni vincolari e diagramma del momento.

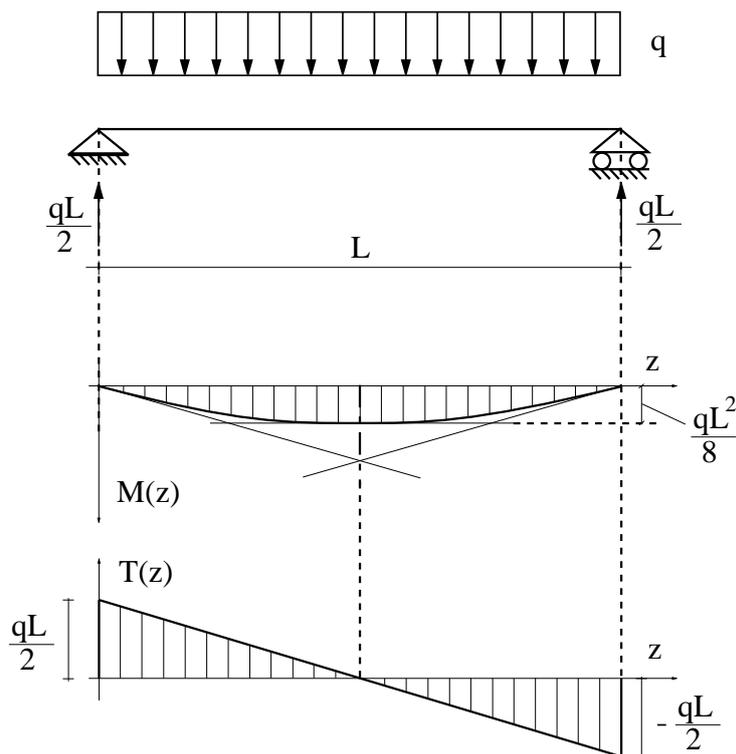


Figura 1.73: Trave appoggiata con carico uniformemente distribuito.

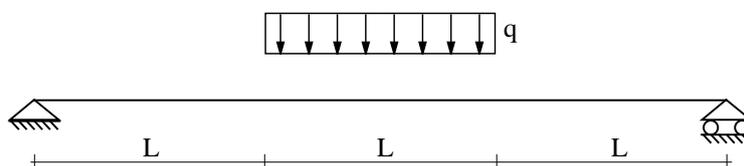


Figura 1.74: Problema 16

da quello ‘falso’ di figura 1.75 bisogna semplicemente interpolare i valori ottenuti in C e D con una funzione lineare. I diagrammi così ottenuti sono riportati in figura 1.76.

Il procedimento utilizzato è di carattere generale. Pertanto in presenza di carichi uniformemente distribuiti, una volta ricavate le reazioni vincolari, conviene preliminarmente sostituire, per ogni tratto in cui agisce il carico e non agiscono forze o coppie (attive o reattive che siano) il carico distribuito con la sua risultante sulla mezzeria del tratto, cioè sul suo asse centrale. I diagrammi che si ottengono sono ‘falsi’ ma i valori dei momenti, delle tangenti al diagramma del momento e del taglio sono esatti in tutti i punti esterni ad ognuno di tali tratti. Per ottenere i diagrammi ‘veri’ bisogna dunque interpolare opportunamente delle parabole e delle funzioni lineari in tali tratti al posto dei diagrammi ‘falsi’ rispettivamente del momento e del taglio.

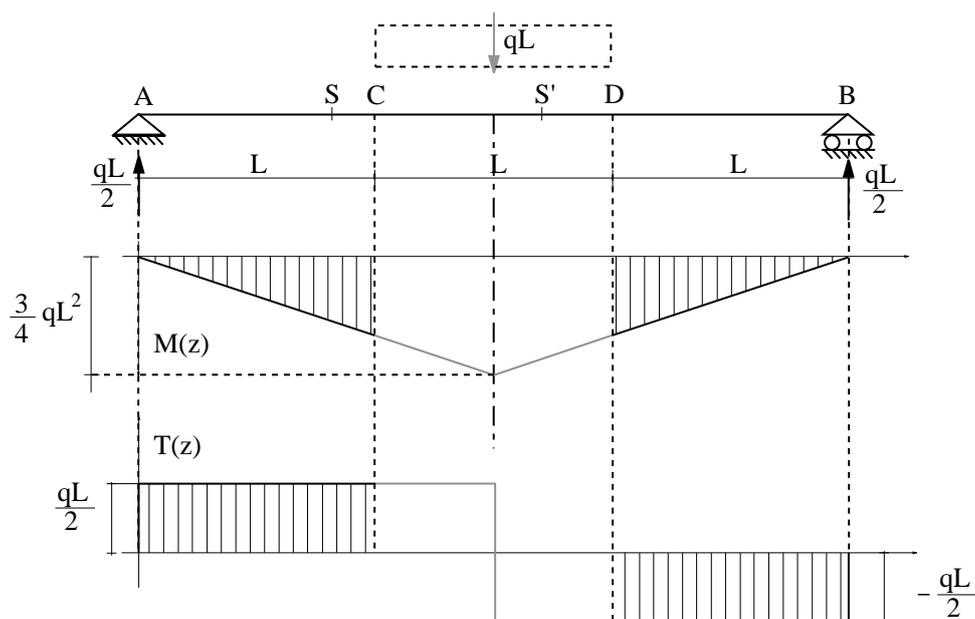


Figura 1.75: Problema 16: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio sullo schema ausiliario in cui si è sostituito il carico distribuito con la sua risultante in mezzeria.

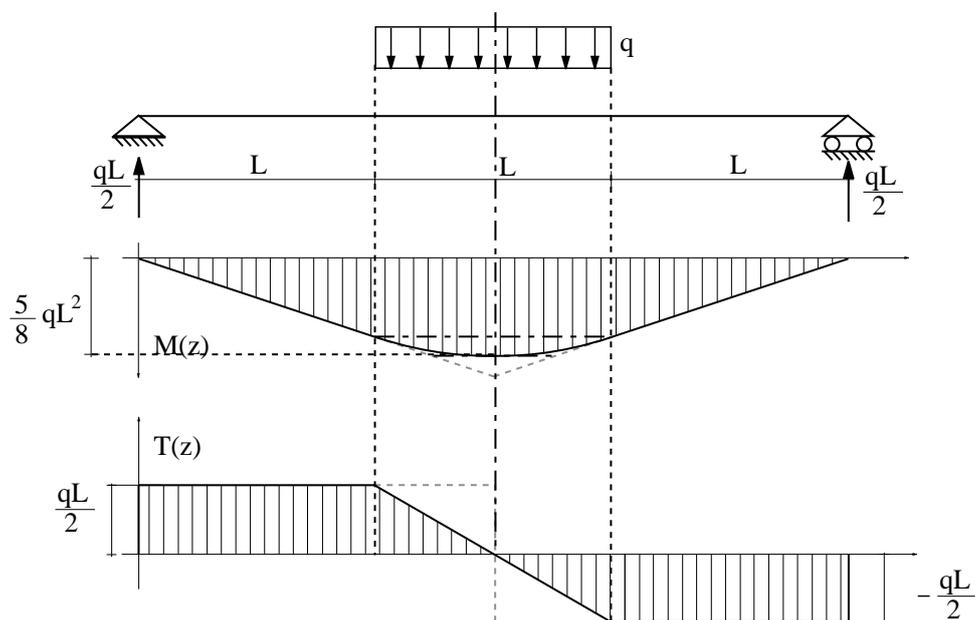


Figura 1.76: Problema 16: diagrammi delle caratteristiche.

Problema 17

In figura 1.77 si è riportato il procedimento per il calcolo delle reazioni vincolari per la trave a due campate del problema 17.

Per il tracciamento del diagramma del momento si può osservare che, essendo il carico q continuo su tutta la trave il momento ha un'unica espressione quadratica ed è quindi rappresentato da un'unica parabola, che peraltro è univocamente definita una volta noti tre parametri, ad esempio due ordinate ed una tangente.

Partendo dal punto C , dove il momento è nullo, si assegna a piacere la tangente t_C nel punto¹⁰ P_C (coincidente con C essendo appunto nullo il momento), scegliendo in tal modo una scala dei momenti. Dovendo essere il momento nullo anche in B , i punti noti P_B e P_C e la tangente t_C sono già sufficienti a definire la funzione momento. Infatti, la tangente t_B in P_B , per la nota proprietà delle parabole, deve incontrare la tangente t_C lungo la verticale passante per il punto medio M_{BC} tra B e C . Essa pertanto è determinata.

Note le tangenti t_B e t_C nei punti P_B e P_C , si può ricavare la tangente in P_A con il seguente ragionamento.

- La tangente incognita t_A in P_A deve intersecarsi con t_C lungo la verticale passante per il punto medio M_{AC} tra A e C , che coincide con B . Si ricava dunque il punto $t_A \cap t_C$.
- La tangente incognita t_A in P_A deve anche intersecarsi con t_B lungo la verticale passante per il punto medio M_{AB} tra A e B . Si ricava dunque il punto $t_A \cap t_B$.
- La tangente t_A si ricava come congiungente i punti trovati $t_A \cap t_C$ e $t_A \cap t_B$.
- P_A , e quindi il valore del momento in A , ovviamente si trova come intersezione della verticale per A con t_A .

Il diagramma del taglio si può tracciare a partire dalle reazioni vincolari in A e in C , che forniscono i tagli in tali sezioni di estremità, ed interpolando tali valori con un'unica funzione lineare dato che il carico è uniformemente distribuito su tutta la trave. Si ritrova come verifica che il taglio si annulla in corrispondenza del punto medio tra B e C , dove il momento assume il valore massimo pari a $qL^2/8$.

Problema 18

Il problema 18 riportato in figura 1.79 non presenta particolari difficoltà dal punto di vista concettuale, ma rispetto ai problemi considerati precedentemente vi sono più azioni contemporaneamente, nel caso in esame il carico distribuito q tra B e D , la coppia \mathcal{M} in B e la forza verticale verso l'alto in C . Per tracciare i diagrammi del momento e del taglio è necessario almeno conoscere i rapporti fra le diverse azioni applicate opportunamente adimensionalizzate. In questo caso sono assegnati i valori numerici delle azioni e della lunghezza L , riportati in figura.

Per il calcolo delle reazioni vincolari si può procedere sia scrivendo le equazioni di equilibrio direttamente sostituendo i valori numerici, oppure operando in forma simbolica e sostituendo i valori numerici nelle espressioni ottenute per le reazioni. In questo

¹⁰Dato un punto Q sulla fondamentale rispetto a cui si traccia il diagramma del momento si indicherà con P_Q il corrispondente punto del diagramma.

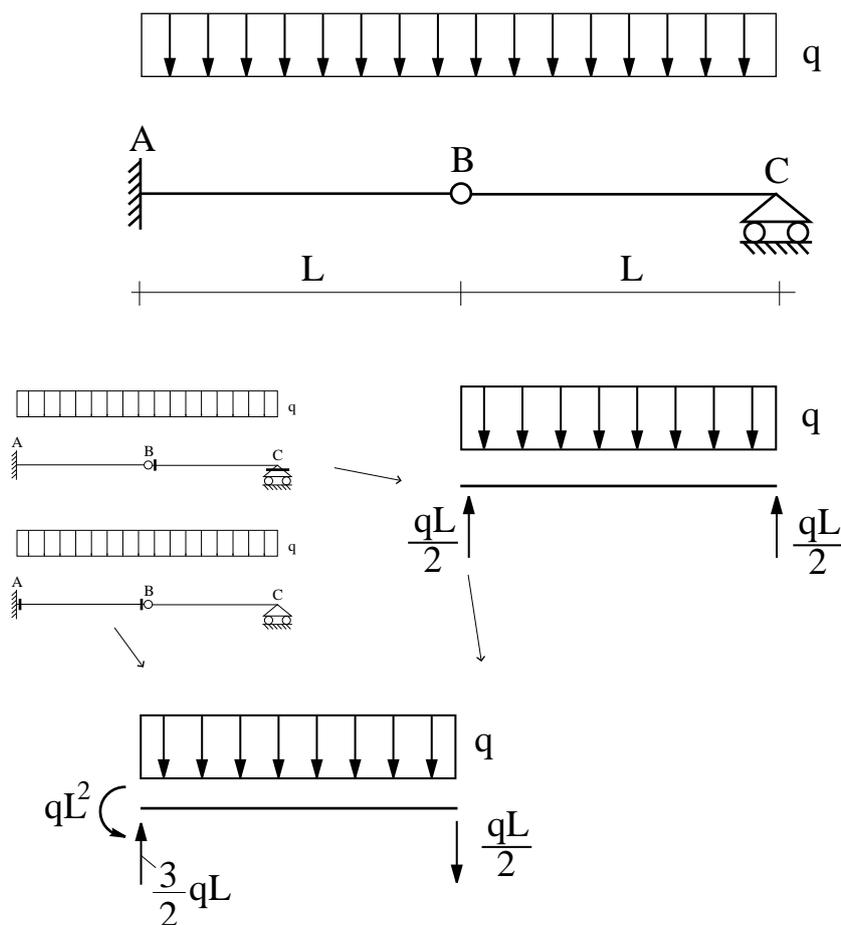


Figura 1.77: Problema 17: determinazione delle reazioni vincolari.

caso si è operato in questo secondo modo, riportando le espressioni delle reazioni in forma simbolica nella figura 1.79.b e calcolandone poi i valori numerici riportati in figura 1.79.c. Per il calcolo delle reazioni vincolari si può operare come segue.

- Partire dall'equilibrio del tratto $C_d D$, sezionando a destra di C .
- Nota la reazione della cerniera in C su CD , dall'equilibrio dell'intorno elementare della cerniera si ricava la reazione della cerniera sul tratto AC .
- Si impone quindi l'equilibrio del tratto AC_s , sezionando a sinistra di C .

Per il tracciamento del diagramma del momento si può invece procedere come segue.

- Si parte dal punto A , dove la coppia reattiva pari a 4 KN m antioraria corrisponde ad un momento flettente negativo, che tende le fibre superiori.
- Il taglio risulta invece nullo in tutto il tratto AB in quanto a sinistra di qualsiasi sezione di questo tratto non vi sono forze verticali applicate, ma solo la coppia reattiva in A . Pertanto il momento è costante tra A e B e pari appunto a

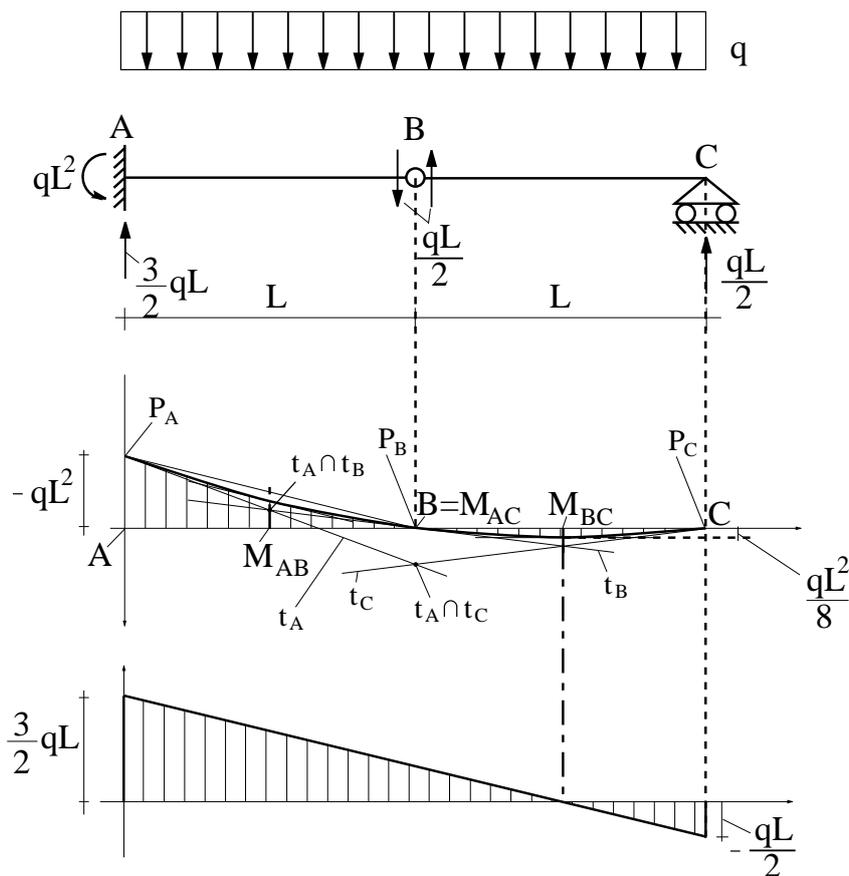


Figura 1.78: Problema 17: costruzione grafica del diagramma del momento e tracciamento del diagramma del taglio.

-4 KN m . In B il momento deve avere una discontinuità essendoci applicata la coppia $\mathfrak{M} = 4 \text{ KN m}$ antioraria. Il salto è pari a $\Delta M = -\mathfrak{M} = -4 \text{ KN m}$ e si ottiene quindi ‘immediatamente a destra’ di B un momento flettente pari a -8 KN m . Tale valore può anche essere trovato direttamente con il principio di sezionamento sezionando a destra di B , in B_d , ed imponendo l’equilibrio del tratto AB_d , oppure del tratto B_dC , o ancora di B_dD .

- Il diagramma del momento tra B e C è parabolico. Il momento è stato ormai calcolato in B , ed è pari a -8 KN m , ed è nullo in C per la presenza della cerniera. Peraltro la reazione verticale della cerniera sul tratto BC è risultata nulla, per cui il taglio alla sinistra di C è nullo. Pertanto la tangente del diagramma del momento alla sinistra di C è orizzontale.
- Noti i valori del momento in B pari -8 KN m ed in C , pari a 0 , e nota la tangente in C , orizzontale, la tangente in B si ricava dal fatto che essa deve incontrare quella in C sulla verticale per il punto medio tra B e C .
- Un procedimento generale, cioè sempre utilizzabile, per tracciare la tangente del

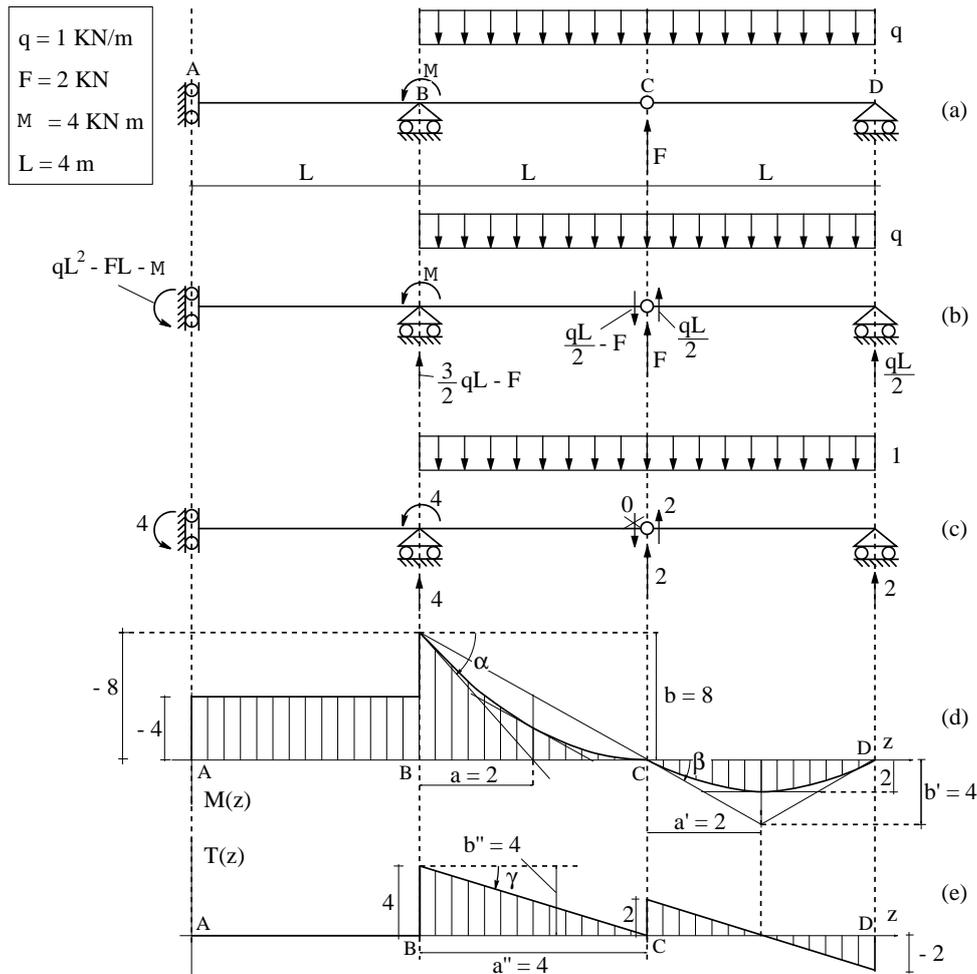


Figura 1.79: Problema 18: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

diagramma del momento a destra di B si basa sui valore del taglio e del momento alla destra di B , ovvero $M_{B_d} = -8 \text{ KN m}$ e $T_{B_d} = 4 \text{ KN}$ (quest'ultimo si calcola immediatamente dall'equilibrio alla traslazione verticale del tratto AB_d). Infatti T_{B_d} è pari alla derivata del momento alla destra di B , cioè pari alla tangente dell'angolo α formato dalla retta tangente alla destra di B con l'orizzontale, assunto positivo se orario in conseguenza del fatto di disegnare il diagramma del momento verso il basso se positivo. La retta tangente al diagramma del momento a destra di B può allora facilmente ricavarsi staccando in direzione orizzontale un qualsiasi segmento di lunghezza a (in figura 1.79.d si è preso $a = 2 \text{ m}$), e ricavando il corrispondente segmento verticale $b = a \tan \alpha = a T_{B_d} = 2 \text{ m} \cdot 4 \text{ KN} = 8 \text{ KN m}$.

- Il diagramma del momento nel tratto CD si può tracciare partendo dai valori del taglio e del momento alla destra di C , pari a $T_{C_d} = 2 \text{ KN}$ e $M_{C_d} = 0$. Il taglio è pari alla tangente dell'angolo β formato dalla retta tangente alla destra di C con l'orizzontale (figura 1.79.d). Tale tangente, analogamente a prima, può essere

disegnata staccando come segmento orizzontale il tratto di fondamentale tra C ed il punto medio tra C e D , di lunghezza pari a $a' = 2 m$, e ricavando il corrispondente segmento verticale $b' = a' \tan \beta = 4 KN m$.

- Tracciata la tangente alla destra di C , quella in D si ricava immediatamente in quanto deve incontrare la tangente alla destra di C sulla verticale passante per il punto medio tra C e D .
- Note le due tangenti alla destra di C ed in D si può quindi interpolare la parabola.

Per quanto riguarda il diagramma del taglio, si è già visto che esso è nullo nel tratto AB . In B ha un salto verso l'alto pari a $4 KN$, pari alla reazione in B che è diretta verso l'alto. Nel tratto BD deve avere pendenza costante in quanto $T' = -q = -1 KN/m$. Tale valore rappresenta la tangente dell'angolo γ formato dal diagramma con l'orizzontale. Riportando il diagramma del taglio verso l'alto se positivo, γ è positivo se antiorario, per cui in questo caso, essendo $\tan \gamma = -1$, γ risulta orario. La tangente è stata disegnata staccando il segmento orizzontale $a'' = 4 m$ e ricavando quello corrispondente verticale pari a $b'' = a'' |\tan \gamma| = 4 KN$ (figura 1.79.e).

Il diagramma del taglio ha poi un salto in corrispondenza del punto C verso l'alto pari a $2 KN$, che è pari alla forza concentrata verso l'alto applicata. Continua poi con la stessa pendenza nel tratto CD ed ha il suo punto di nullo nella mezzzeria di tale tratto in corrispondenza del massimo del diagramma del momento flettente.

1.5 Travature non ad asse rettilineo - Metodi grafici

Per travatura non ad asse rettilineo si intende in questo contesto un assemblaggio di travi rettilinee i cui assi non sono tutti disposti su una stessa retta. Per tali tipi di problema si studieranno, in luogo dei metodi analitici sviluppati finora, solamente metodi grafici. Inoltre, per semplificare la trattazione ci si limiterà al tracciamento del solo diagramma del momento, sebbene alcune considerazioni si svolgeranno per tutte e tre le caratteristiche della sollecitazione.

I metodi grafici che si illustreranno si basano su poche ma fondamentali condizioni di equilibrio grafico, note dalla Meccanica Razionale, che si espongono preliminarmente.

1.5.1 Condizioni di equilibrio grafico

Dato un sistema \mathcal{F} di forze costituito da n vettori forza \mathbf{F}_i , $i = 1, \dots, n$, si ottiene il cosiddetto poligono di tali forze disponendo n vettori \mathbf{F}'_i equipollenti ciascuno alla forza \mathbf{F}_i , in modo tale che l'estremo iniziale della forza \mathbf{F}'_{i+1} sia coincidente con quello finale della forza \mathbf{F}'_i . È facile vedere che il vettore che ha il suo estremo iniziale coincidente con l'estremo iniziale di \mathbf{F}'_1 ed il suo estremo finale coincidente con l'estremo finale di \mathbf{F}'_n è equipollente alla risultante di \mathcal{F} (figura 1.80).

Condizioni necessarie e sufficienti affinché un sistema di due forze, o di tre forze, sia equivalente a zero sono le seguenti:

Teorema 6 *Un sistema di due forze è equivalente a zero se e solo se esse sono uguali in modulo, opposte in verso e applicate sulla stessa retta d'azione, cioè se e solo se esse costituiscono una coppia di braccio nullo.*

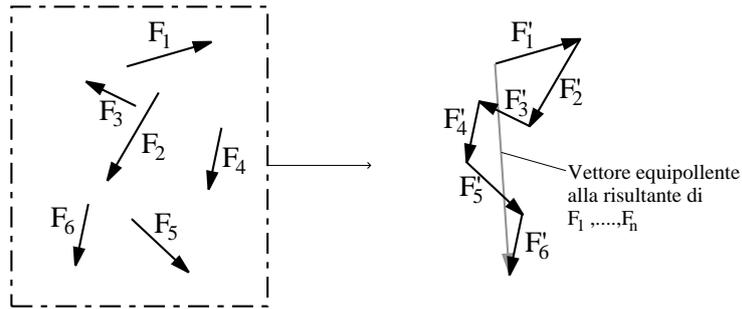


Figura 1.80: Poligono delle forze.

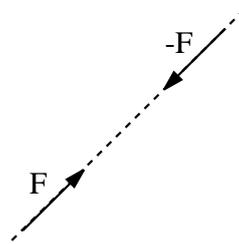


Figura 1.81: Sistema di due forze equivalente a zero.

Teorema 7 *Un sistema di tre forze è equivalente a zero se e solo se il loro poligono è chiuso e le loro rette d'azione convergono in un unico punto del piano, proprio o improprio.*

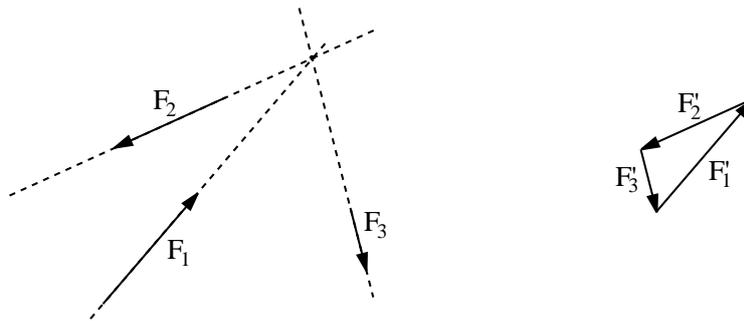


Figura 1.82: Sistema di tre forze equivalente a zero.

Vale inoltre la seguente importante condizione di equivalenza statica tra un sistema costituito da una forza ed una coppia ed uno formato da una sola forza.

Teorema 8 *Si consideri un sistema \mathcal{F}_1 costituito da una forza \mathbf{F} , applicata in un punto qualsiasi di una retta r_1 del piano orientata concordemente al verso di \mathbf{F} , ed una coppia*

\mathfrak{M} , assunta positiva se antioraria. Percorrendo r_1 nel suo verso positivo si assumano positive le distanze da r_1 dei punti alla sinistra di r_1 e negative quelle alla destra di r_1 .

Il sistema \mathcal{F}_1 è allora equivalente al sistema \mathcal{F}_2 costituito dalla stessa forza \mathbf{F} applicata però su una retta r_2 parallela ad r_1 posta alla distanza d da r_1 pari a $d = -\mathfrak{M}/|\mathbf{F}|$.

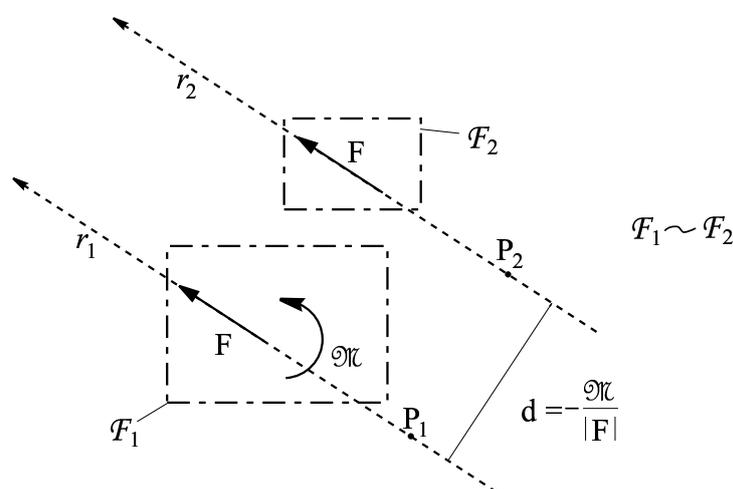


Figura 1.83: Equivalenza tra un sistema di una forza ed una coppia ed uno formato da una sola forza.

Con riferimento alla figura 1.83, per verificare che i due sistemi \mathcal{F}_1 ed \mathcal{F}_2 sono tra loro equivalenti, essendo evidente che essi hanno la stessa risultante \mathbf{F} bisogna solo verificare che essi hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un polo scelto arbitrariamente. Avendo infatti la stessa risultante, se è uguale il loro momento risultante calcolato rispetto ad un polo sarà anche uguale quello calcolato rispetto ad un altro polo qualsiasi. Nel caso della figura 1.83 il momento risultante \mathfrak{M}_{1,P_1} di \mathcal{F}_1 rispetto al polo P_1 è \mathfrak{M} ed è antiorario, cioè positivo secondo la convenzione assunta, mentre quello di \mathcal{F}_2 è dato da $\mathfrak{M}_{2,P_1} = |\mathbf{F}| |d|$, anch'esso positivo. Essendo $|d| = |\mathfrak{M}|/|\mathbf{F}|$ si ha $\mathfrak{M}_{1,P_1} = \mathfrak{M}_{2,P_1}$. Assumendo P_2 come polo, il momento risultante rispetto di \mathcal{F}_2 è nullo, e quello di \mathcal{F}_1 è dato da $\mathfrak{M}_{1,P_2} = \mathfrak{M} - |\mathbf{F}| |d| = \mathfrak{M} + |\mathbf{F}| d$, essendo $d < 0$ in questo caso. Poiché $d = -\mathfrak{M}/|\mathbf{F}|$ si ricava che $\mathfrak{M}_{1,P_2} = 0 = \mathfrak{M}_{2,P_2}$.

L'ultima verifica sottolinea il fatto che r_2 rappresenta l'asse centrale del sistema \mathcal{F}_1 , ovvero il luogo dei punti rispetto ai quali il momento risultante di \mathcal{F}_1 è nullo.

1.5.2 Applicazioni del metodo grafico ai telai piani isostatici

Problema 1: arco a tre cerniere

Si consideri l'arco a tre cerniere di figura 1.84. Per la determinazione delle reazioni vincolari bisogna, così come fatto per le travi ad asse rettilineo, utilizzare il principio di sezionamento imponendo che sia soddisfatto l'equilibrio di ogni tratto della struttura. Scrivendo ad esempio le equazioni cardinali della statica per i due tratti AB e BC , soggetti alle eventuali azioni esterne ed alle reazioni vincolari esterne ed interne, essendo

la struttura isostatica si ritrova l'unica soluzione del problema dell'equilibrio e dunque le reazioni vincolari.

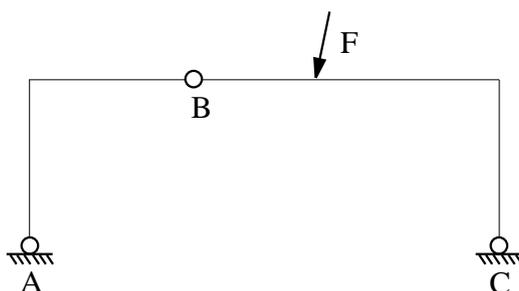


Figura 1.84: Problema 1: arco a tre cerniere.

In molti casi significativi, come quello in esame, si possono determinare le reazioni vincolari in una struttura isostatica e le caratteristiche della sollecitazione utilizzando le procedure della cosiddetta 'statica grafica'. Con i metodi che si illustreranno di seguito si ricercano, con ragionamenti di tipo grafico, le reazioni vincolari analizzando un tratto alla volta. Non è però arbitraria la scelta del tratto da cui iniziare. Si è visto anche per il calcolo analitico delle reazioni vincolari per esempio nel caso di figura 1.32, che le 3 equazioni cardinali della statica per il tratto AC coinvolgono 5 incognite e sono dunque accoppiate alle 3 equazioni da scrivere per il tratto CD , che invece coinvolgono solamente 3 incognite. Pertanto, anche procedendo attraverso la soluzione analitica delle equazioni della statica, conviene spesso partire da un tratto e procedere successivamente all'analisi dell'equilibrio degli altri tratti. I metodi della statica grafica che si illustreranno di seguito si basano sulla possibilità di poter analizzare l'equilibrio della struttura tratto per tratto.

Ad esempio, nel caso in esame di figura 1.84 non si può partire dal tratto BC . Infatti la reazione di B su BC deve avere la sua retta d'azione passante per B . Analogamente la reazione in C deve avere la sua retta d'azione passante per C . Il tratto BC è soggetto a tali due reazioni ed alla forza F , cioè a tre forze. Affinché sussista l'equilibrio le tre rispettive rette d'azione devono convergere in un unico punto. Ma si vede dalla figura 1.85 che esistono infinite possibilità per soddisfare tale condizione di equilibrio grafico.

Partendo invece dal tratto AB , si vede che, poiché esso è solamente soggetto alle reazioni in A ed in B , affinché sussista l'equilibrio del tratto tali reazioni devono avere la stessa retta d'azione. Dovendo poi esse avere rette d'azione passanti rispettivamente per A e per B , la congiungente tali punti fornisce proprio la retta d'azione cercata (figura 1.86).

Poiché la cerniera in B non è caricata le due sue reazioni su AB e su BC sono uguali ed opposte ed hanno dunque la stessa retta d'azione, coincidente con la congiungente A e B . Ritornando allora all'analisi dell'equilibrio del tratto BC , denotando con I e II i tratti AB e BC , è nota la retta d'azione r_B della reazione \mathbf{R}_B^{II} di B sul tratto II . Per la condizione di equilibrio di tre forze si ricava anche la retta d'azione r_C di \mathbf{R}_C , come mostrato in figura. I moduli ed i versi delle forze si ricavano poi imponendo che il poligono delle forze si chiuda.

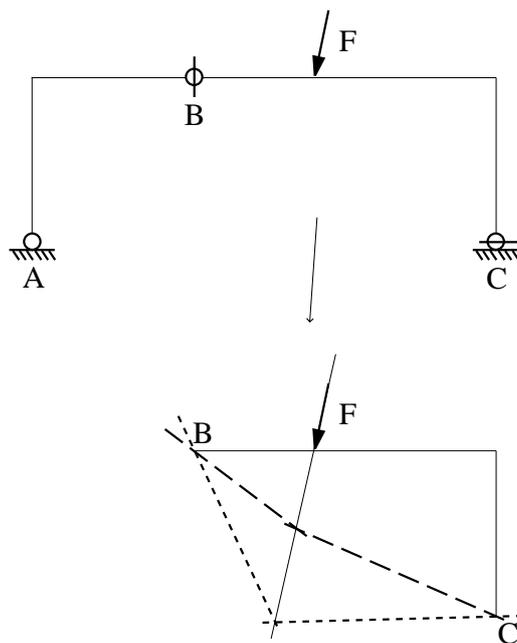


Figura 1.85: Per la soluzione grafica non si può partire dal tratto BC .

Nota \mathbf{R}_B^I , si ricava anche $\mathbf{R}_B^I = -\mathbf{R}_B^{II}$ e dunque $\mathbf{R}_A = -\mathbf{R}_B^I = \mathbf{R}_B^{II}$. Le reazioni vincolari così ottenute sono riportate in figura 1.86.

Per il calcolo del diagramma del momento si può partire dal punto C . Si consideri allora una sezione S come in figura 1.87 e si imponga l'equilibrio alla rotazione del tratto CS intorno ad S . In tale condizione di equilibrio non intervengono lo sforzo normale ed il taglio, disegnati perciò in grigio. Si ricava che il modulo $|M_S|$ del momento in S vale $|M_S| = |\mathbf{R}_C| d$, dove d è la distanza di S dalla retta d'azione di \mathbf{R}_C . Se si conviene di adottare come fondamentale del diagramma del momento in ogni trave l'asse stesso della trave e di disegnare l'ordinata del momento flettente dalla parte delle fibre tese non è necessario assegnare un segno a M_S . Nel caso in esame la coppia agente in S sul tratto CS è antioraria e tende le fibre alla destra del tratto stesso. Il momento varia poi linearmente con d , che a sua volta varia linearmente sul tratto CD in esame poiché esso è rettilineo, per cui si ricava per il tratto CD il diagramma lineare mostrato in figura 1.87. La pendenza può essere assegnata arbitrariamente e determina la scala del diagramma del momento.

Si consideri ora l'equilibrio del nodo D sezionando nelle sezioni D_1 e D_2 immediatamente a sinistra e sotto D . Non essendoci in D una coppia applicata, la coppia oraria corrispondente al momento in D_2 deve essere bilanciata da una coppia uguale in modulo ma antioraria applicata in D_1 , che tende le fibre superiori. Ciò si traduce nel ribaltamento dell'ordinata tracciata in D_2 come mostrato in figura. Considerando ora una sezione S' del tratto BD a destra del punto di applicazione della forza, l'equilibrio del tratto $S'C$ fornisce il modulo del momento flettente in S' pari a $|M_{S'}| = |\mathbf{R}_C| d'$, dove d' è la distanza di S' dalla retta d'azione di \mathbf{R}_C . Il momento varia dunque linearmente con d' , che a sua volta varia linearmente sul tratto CD . Il punto di nullo del diagramma

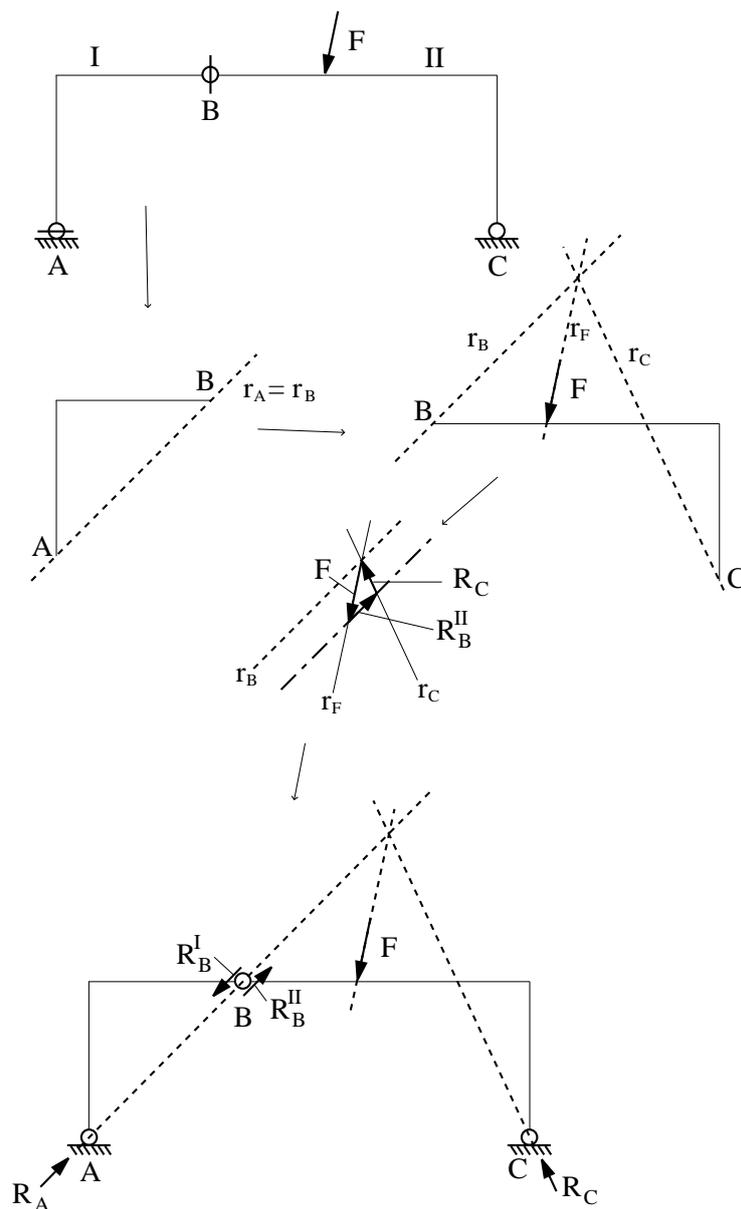


Figura 1.86: Determinazione delle reazioni vincolari per via grafica.

è quello in cui d' si annulla, cioè il punto di intersezione del tratto in esame con la retta d'azione della reazione R_C . Il diagramma prosegue poi linearmente con la stessa pendenza fino al punto di applicazione della forza F . Ciò lo si deduce anche considerando una sezione S''' tra il punto di applicazione della forza e il punto di nullo del diagramma ed imponendo l'equilibrio del tratto $S'''C$.

Dal punto C fino al punto di applicazione della forza per ogni sezione considerata si è analizzato l'equilibrio del tratto tra la sezione stessa ed il punto C , e nell'equilibrio alla rotazione intorno alla sezione sono intervenuti sempre e solo il momento nella sezione e la reazione R_C . Pertanto il momento flettente in ciascuna sezione deve bilanciare il

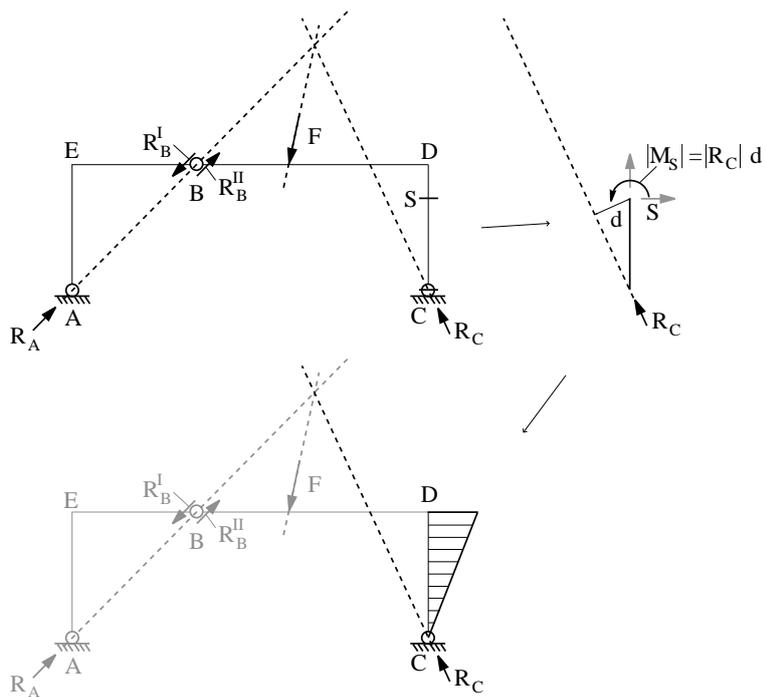


Figura 1.87: Diagramma del momento sul tratto CD .

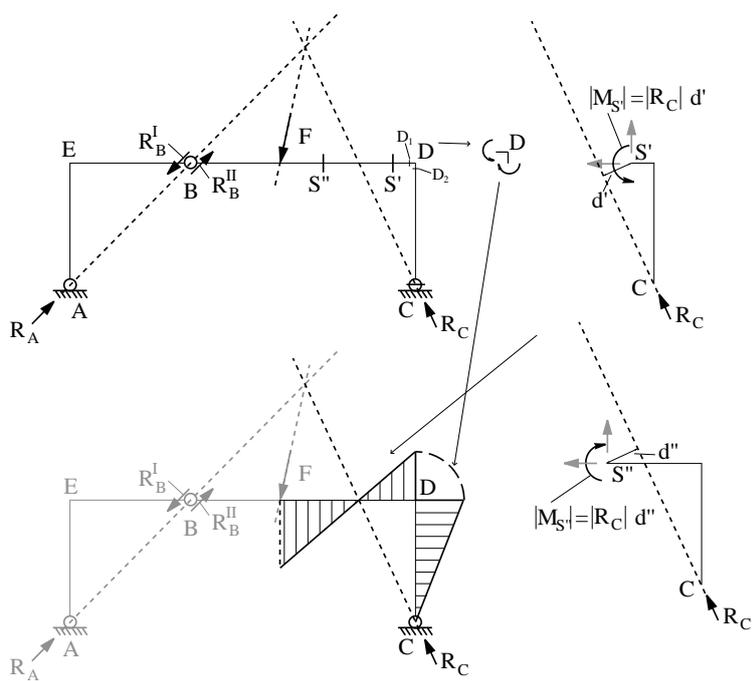


Figura 1.88: Diagramma del momento tra la forza e C .

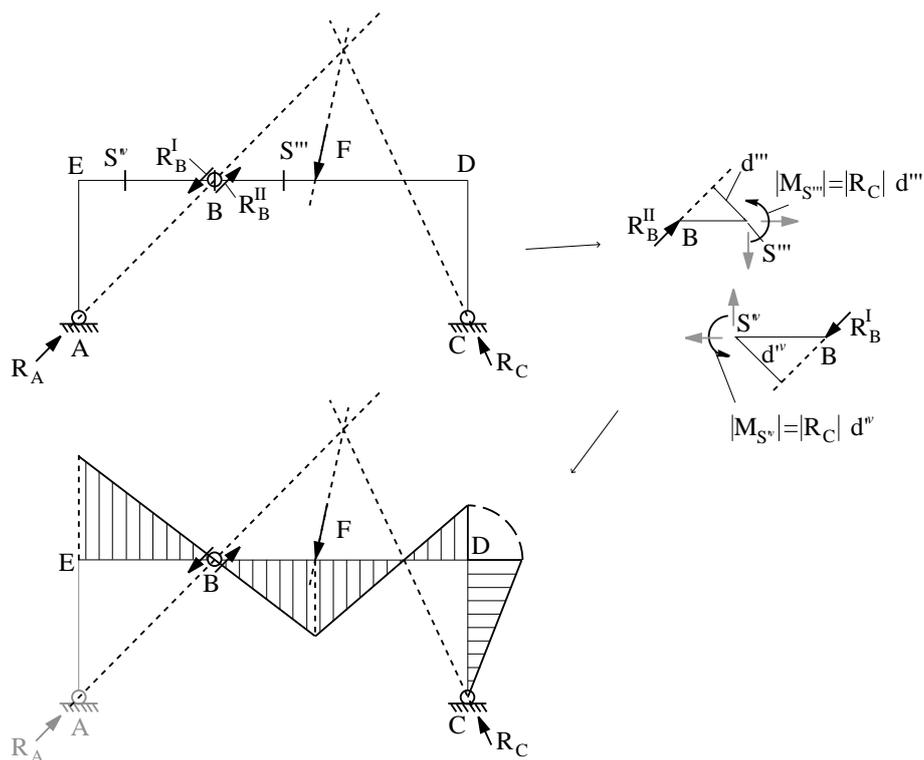


Figura 1.89: Diagramma del momento tra E e C .

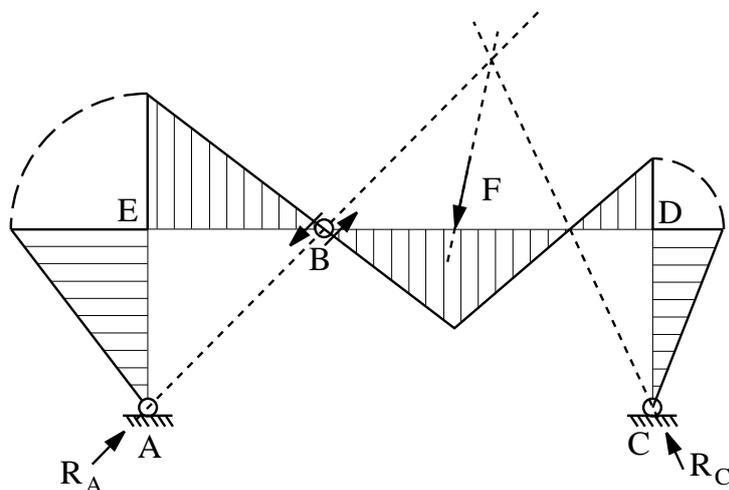


Figura 1.90: Diagramma del momento completo.

momento di R_C rispetto alla sezione stessa. Passando alle sezioni S''' e S'' conviene per semplicità considerare l'equilibrio rispettivamente dei tratti BS''' e $S''B$, come fatto in figura. Si riconosce che il momento in S''' deve bilanciare il momento di R_B^{II} rispetto a S''' stessa, mentre il momento in S'' deve bilanciare il momento di R_B^I rispetto a S'' .

Si ottiene il diagramma lineare di figura 1.89.

Per l'equilibrio del nodo E l'ordinata ottenuta in E per il tratto EB si ribalta sul tratto AE , su cui il diagramma prosegue linearmente annullandosi nella cerniera, che è anche il punto di intersezione del tratto con la retta d'azione di \mathbf{R}_A . Il diagramma del momento completo è riportato in figura 1.90.

Problema 2

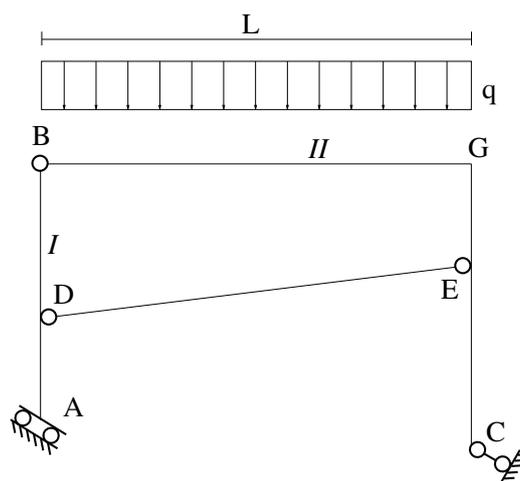


Figura 1.91: Problema 2: geometria e carico.

Si consideri ora il telaio isostatico di figura 1.91 costituito dai due tratti I e II uniti dal pendolo DE . È facile verificare che, imponendo l'equilibrio di uno solo dei tratti I o II , non è possibile determinare le rette d'azione delle reazioni vincolari. Bisogna invece, in questo caso, partire dall'equilibrio dell'intera struttura. Il carico distribuito evidentemente può sostituirsi con la sua risultante e le altre forze agenti sulla struttura sono il sistema di reazioni del pattino in A , ovvero una forza ed una coppia equivalenti ad un'unica forza \mathbf{R}_A avente una retta d'azione ortogonale alla direzione di scorrimento del pattino, e la reazione \mathbf{R}_C . Affinché tali forze siano in equilibrio la retta d'azione di \mathbf{R}_A deve passare per il punto d'intersezione tra la risultante del carico esterno e la retta d'azione di \mathbf{R}_C , come è mostrato in figura 1.92.

Determinata la forza \mathbf{R}_A , equivalente al sistema di reazioni del pattino in A , non bisogna dimenticare che tale sistema di reazioni agisce evidentemente in A e non sulla retta d'azione di \mathbf{R}_A ¹¹. Pertanto è utile riportare esplicitamente tale sistema, che si ottiene trasladando \mathbf{R}_A in A ed aggiungendo la coppia di trasporto.

Note le reazioni in A ed in C , è possibile determinare le reazioni in B e le reazioni del pendolo in D ed E sui due tratti imponendo singolarmente l'equilibrio del tratto I e del tratto II (figura 1.93).

¹¹Tale considerazione sembrerebbe ovvia, ma in realtà non lo è in quanto non è affatto raro l'errore di confondere la retta d'azione della risultante di un sistema di forze con il punto o i punti di applicazione di ciascuna delle forze del sistema.

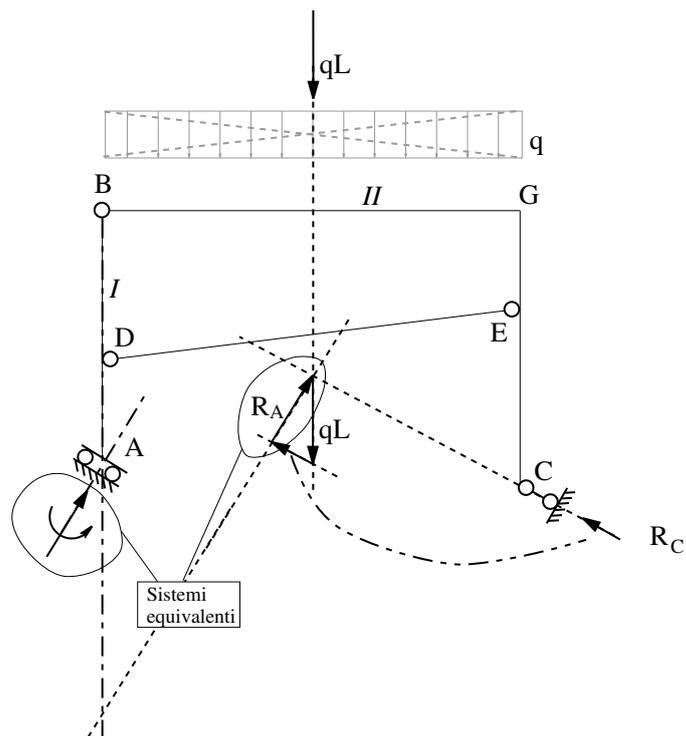


Figura 1.92: Equilibrio esterno.

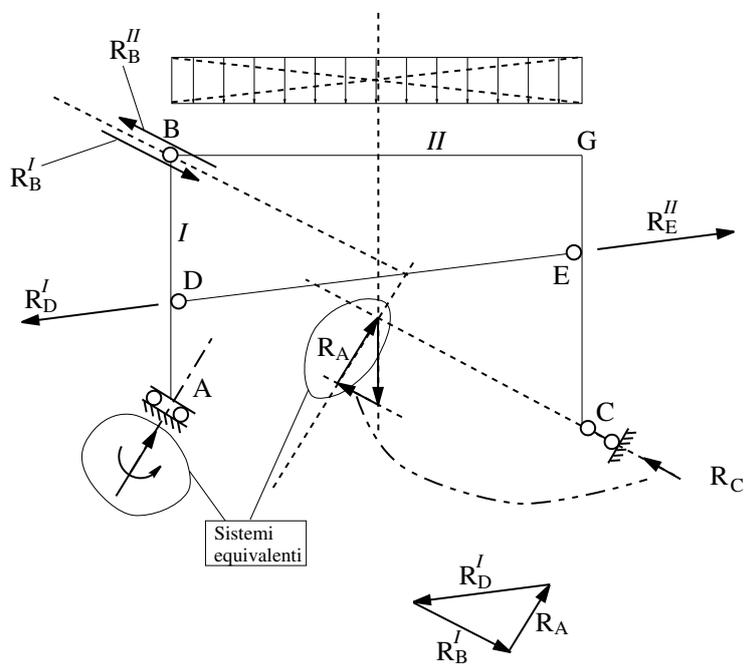


Figura 1.93: Equilibrio dei tratti I e II.

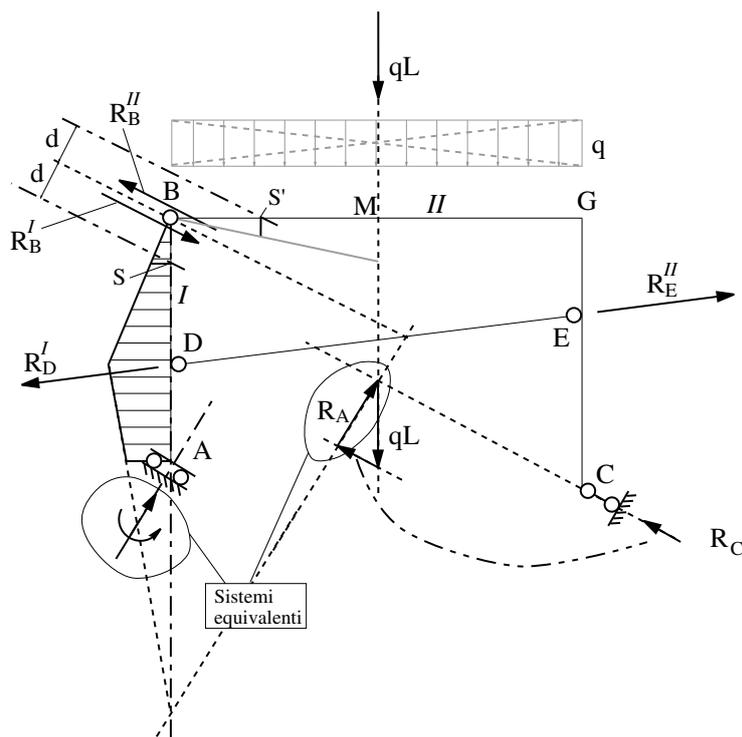


Figura 1.94: Diagramma del momento sul tratto I.

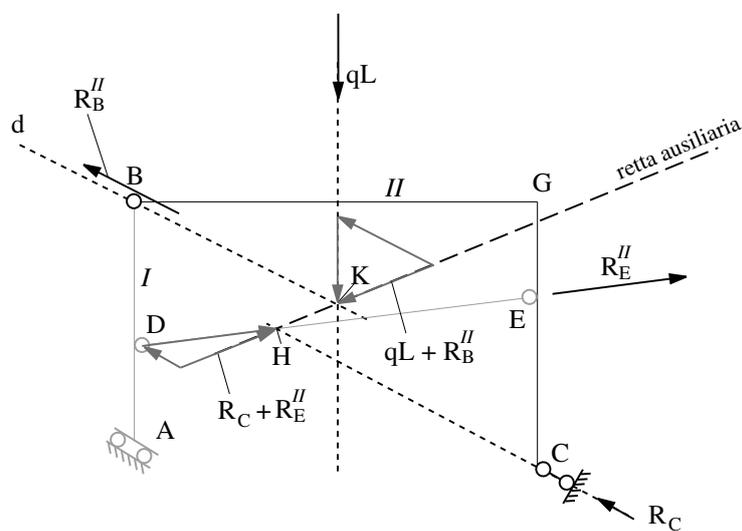


Figura 1.95: Equilibrio del II tratto e determinazione della retta ausiliaria.

E' possibile iniziare il tracciamento del diagramma del momento da vari punti. In questo caso si è iniziato dal punto A. In A il momento non è nullo, e dal verso della coppia reattiva del pattino si evince che sono tese le fibre alla sinistra di A. Pertanto si stacca una prima ordinata dal lato delle fibre tese, il cui modulo determina implicita-

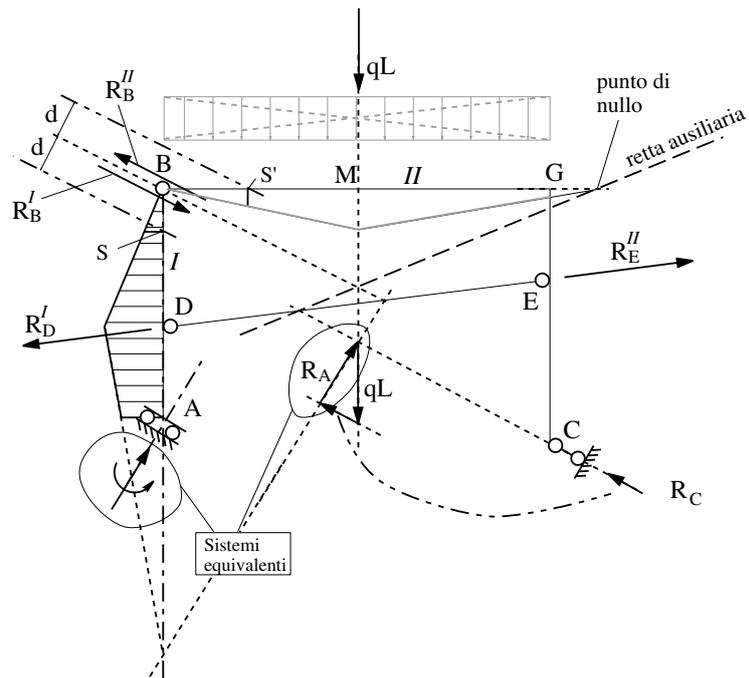
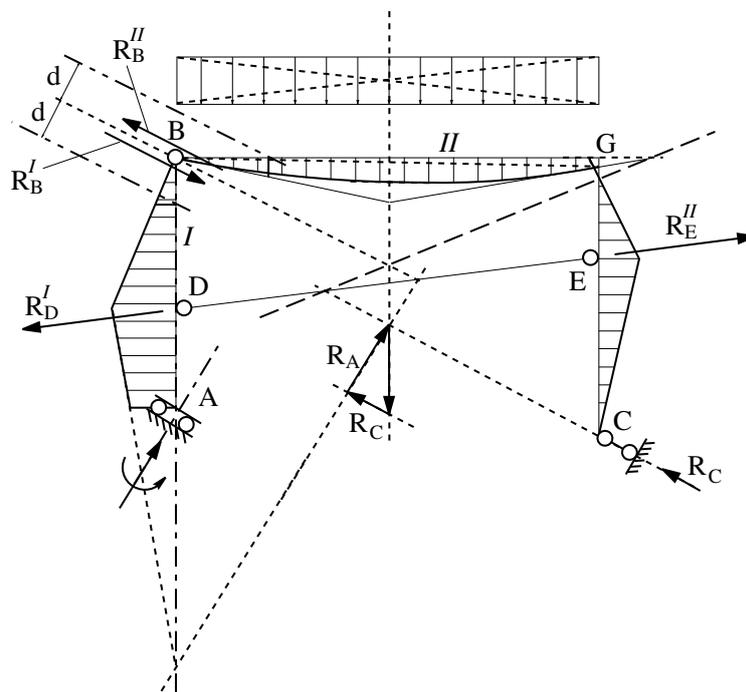
Figura 1.96: Diagramma falso sul tratto BG .

Figura 1.97: Diagramma del momento completo.

mente la scala del diagramma del momento e quindi va scelto con la sola accortezza di ottenere una scala ragionevole.

Sul tratto AD il diagramma è lineare non essendoci un carico distribuito. Avendo già determinato la scala del momento non è possibile assegnare in modo arbitrario la pendenza del diagramma, che si determina invece considerando l'equilibrio di un qualsiasi tratto tra A ed una sezione S contenuta tra A e D . Si vede così facilmente 'la forza che produce il momento' è \mathbf{R}_A e che quindi il punto di nullo del diagramma è l'intersezione della retta d'azione di \mathbf{R}_A con la prosecuzione del tratto AD (figura 1.94). In corrispondenza del punto di applicazione di \mathbf{R}_D^I il diagramma presenta una cuspid e, oltre tale punto, è di nuovo lineare e si annulla in B .

Per procedere con il tracciamento del diagramma del momento sul tratto BG , si osserva innanzitutto che si può operare, come visto in precedenza per il problema 16, considerando 'in prima battuta' al posto del carico la sua risultante applicata nel punto M , ovvero in mezzeria. Il diagramma che si ottiene è falso, ed è indicato in grigio nelle figure 1.96 e 1.97, ma evidentemente i suoi valori in B ed in G e le tangenti in tali punti saranno corretti.

Pertanto, il diagramma falso è lineare nel tratto BM . Poiché, come si è già osservato, la scala del diagramma è stata già implicitamente fissata con la prima scelta dell'ordinata in A , evidentemente anche nel proseguire il diagramma a partire da B , dove il momento è nullo, bisogna in qualche modo rispettare tale scala. A tal fine si utilizza una semplice costruzione grafica che si basa sulla considerazione che le reazioni \mathbf{R}_B^I e \mathbf{R}_B^{II} sono uguali in modulo ed hanno la stessa retta d'azione¹², e che dunque in punti posti alla stessa distanza da tale retta d'azione si dovrà ottenere lo stesso valore assoluto del momento flettente, e quindi la stessa ordinata. Pertanto, disegnando due rette parallele aventi la stessa distanza d dalla retta d'azione delle reazioni in B , le loro intersezioni con i tratti DB e BG sono rispettivamente i punti S ed S' (figura 1.94). Nel punto S è stato già determinato il momento, per cui l'ordinata del momento in S va riportata in S' . Da quale parte bisogna riportare tale ordinata lo si vede poi considerando il segno del diagramma del momento (falso) sul tratto BM . In particolare, in questo caso, la reazione \mathbf{R}_B^{II} tende le fibre inferiori.

Nota l'ordinata in S' , si determina il diagramma lineare falso nel tratto BM fino ad incontrare la risultante del carico in M , dove il diagramma falso presenta una cuspid e.

Considerando ora una sezione generica tra M e G , si può imporre l'equilibrio della parte del tratto II da tale sezione fino a B , a sinistra, o della parte sempre del tratto II che va da tale sezione fino a C . Nel primo caso la 'forza che produce il momento è la risultante della reazione \mathbf{R}_B^{II} e della risultante del carico. Nel secondo caso tale forza è data dalla risultante di \mathbf{R}_E^{II} e di \mathbf{R}_C . Queste quattro forze, insieme, costituiscono il sistema di forze che agisce sul tratto II , e devono dunque costituire un sistema equivalente a zero. D'altra parte la risultante di \mathbf{R}_B^{II} e della forza qL equivalente al carico è una forza che passa per il punto d'intersezione delle loro rette d'azione, che in figura 1.95 è indicato con K . Analogamente la risultante di \mathbf{R}_E^{II} e di \mathbf{R}_C è una forza che passa per il punto d'intersezione delle loro rette d'azione, che in figura 1.95 è indicato con H . Tali due risultanti devono costituire un sistema equivalente a zero e dunque si devono

¹²Si sottolinea che, per soli motivi di chiarezza grafica le due reazioni in B si sono disegnate leggermente spostate rispetto alla loro retta d'azione, che invece passa per il baricentro della cerniera in B .

trovare sulla stessa retta d'azione, che passa dunque per H e K ed è comunemente detta 'retta ausiliaria' (figura 1.95).

Evidentemente l'intersezione della retta ausiliaria con il tratto MG o con la sua prosecuzione è proprio il punto di nullo del diagramma tra M e G (figura 1.96). Nel diagramma falso tra B e G va infine interpolato il diagramma vero, parabolico, tenendo conto che i valori in B e G del diagramma falso e le rispettive tangenti sono corrette (figura 1.97).

Il resto del tracciamento del diagramma del momento, riportato in figura 1.97, non presenta difficoltà concettuali nuove e viene lasciato come esercizio.

1.5.3 Segno delle caratteristiche della sollecitazione

Si è visto che la convenzione di riportare il diagramma del momento dalla parte delle fibre tese consente di tracciare il diagramma senza dover assegnare un segno al momento flettente in ogni sezione. In molti casi è però opportuno potere assegnare un segno al momento ed in generale alle caratteristiche della sollecitazione. A tale scopo si deve considerare per ogni trave rettilinea della travatura, ad esempio la trave i -esima, un sistema di riferimento locale $\{O, y_i, z_i\}$ avente l'asse z_i coincidente con l'asse della trave. Per ogni trave il segno delle caratteristiche della sollecitazione si può dunque ricavare tenendo conto delle convenzioni già adottate e del sistema di riferimento locale scelto (figura 1.98.a-b).

Dalla figura 1.98.c si nota però che, facendo riferimento al concio elementare, qualsiasi sia la scelta del riferimento locale il taglio positivo è costituito da due forze che sul concio danno un momento orario. Anche per lo sforzo normale si riconosce che, qualsiasi sia la scelta del riferimento locale, uno sforzo normale positivo corrisponde ad una sollecitazione di trazione sul concio elementare.

Pertanto i segni del taglio e dello sforzo normale possono ricavarsi senza dovere necessariamente assegnare per ogni trave un sistema di riferimento locale, mentre tale necessità rimane per dare un segno al momento flettente. Spesso, in luogo degli assi del riferimento locale per ogni trave della travatura si disegna una linea tratteggiata traslando leggermente l'asse di ogni trave dalla parte dell'asse y del riferimento locale stesso. In questo modo si riconosce facilmente che un momento flettente è positivo se tende le fibre dalla parte della linea tratteggiata ed è negativo se tende le fibre dalla parte opposta.

Con riferimento al diagramma del momento per l'arco a tre cerniere di figura 1.84, con la linea tratteggiata scelta in figura 1.99 il momento risulta positivo nel tratto tra B e G e negativo tra A e B e tra G e C .

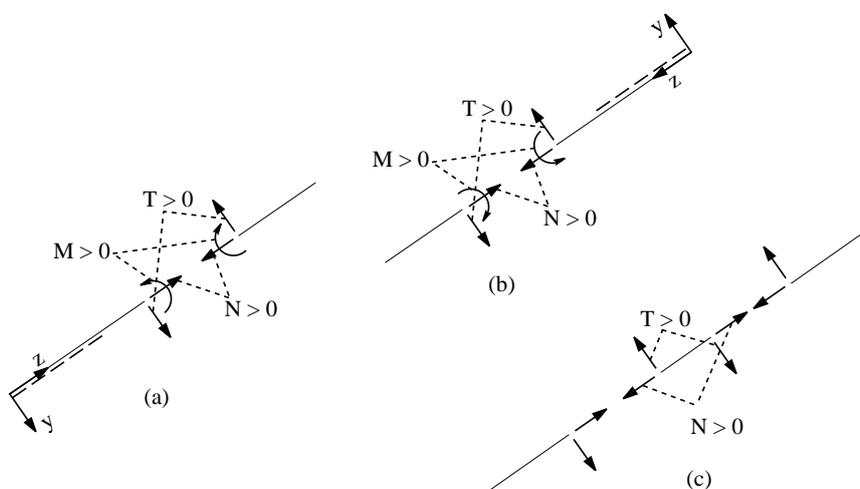


Figura 1.98: Segno delle caratteristiche della sollecitazione.

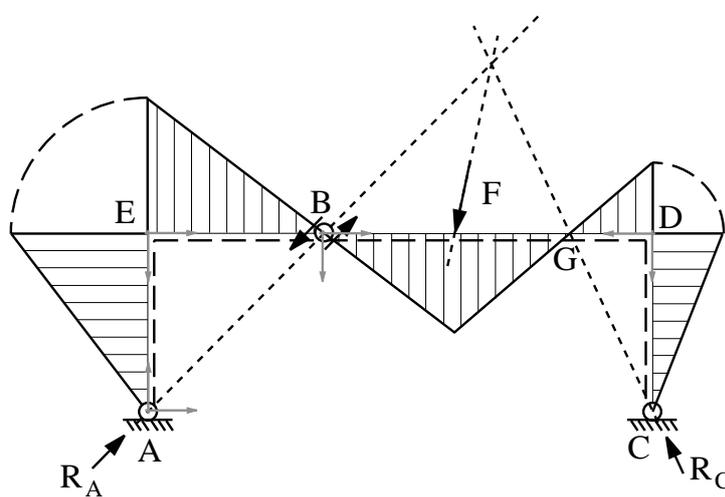
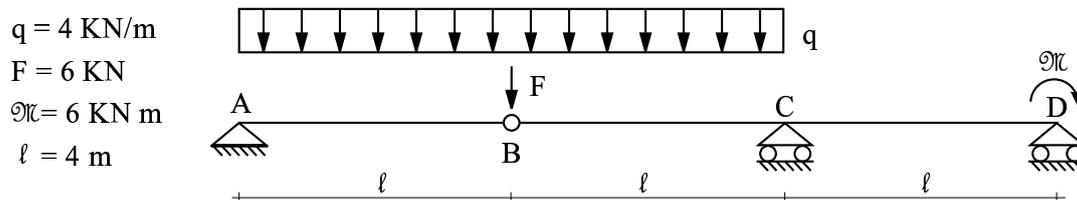


Figura 1.99: La linea tratteggiata consente di assegnare un segno al momento in ogni punto del diagramma.

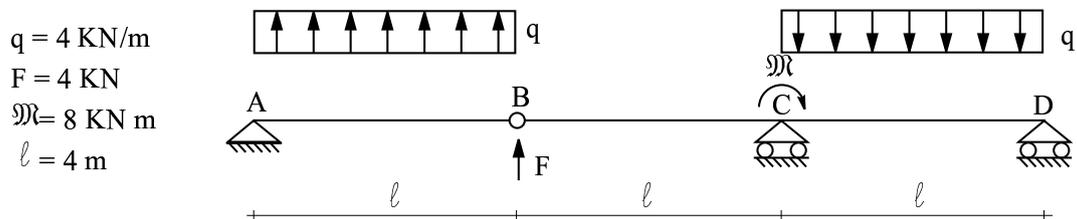
1.6 Esercizi proposti

Nei problemi 1-16 si richiede:

- di determinare le reazioni vincolari;
- di tracciare i diagrammi del taglio e del momento;
- di ricavare le espressioni analitiche delle funzioni taglio e momento.

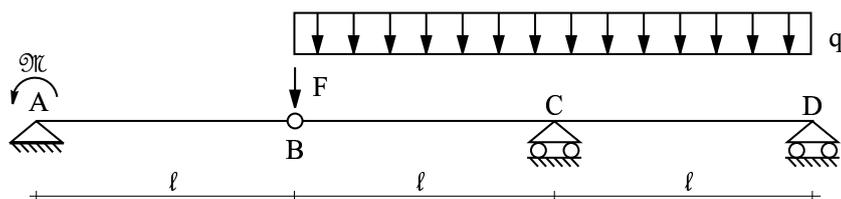


Problema 1.



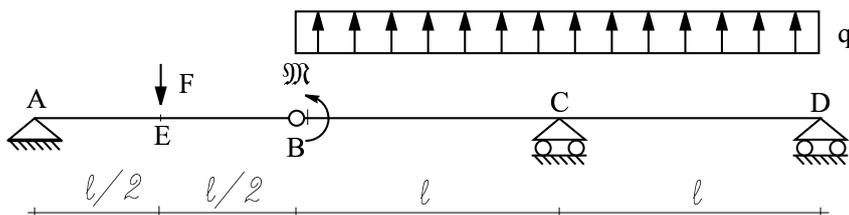
Problema 2.

$q = 4 \text{ KN/m}$
 $F = 4 \text{ KN}$
 $\mathcal{M} = 8 \text{ KN m}$
 $l = 4 \text{ m}$



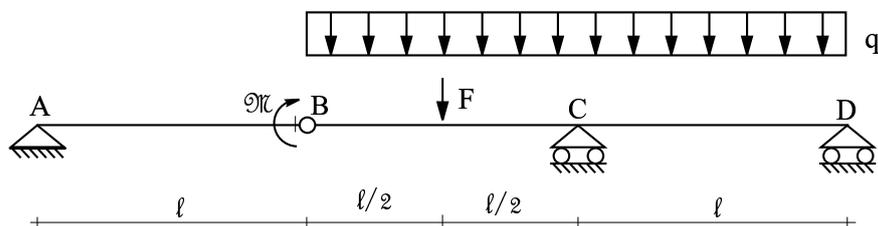
Problema 3.

$q = 4 \text{ KN/m}$
 $F = 4 \text{ KN}$
 $\mathcal{M} = 8 \text{ KN m}$
 $l = 4 \text{ m}$



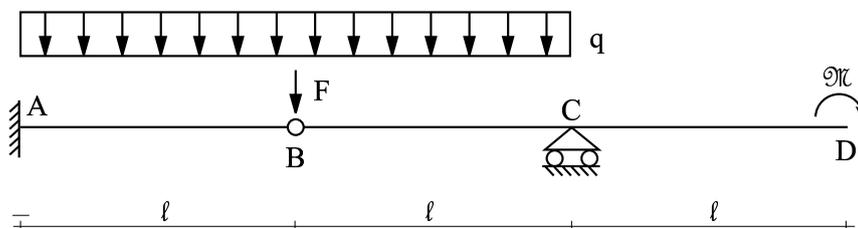
Problema 4.

$q = 4 \text{ KN/m}$
 $F = 4 \text{ KN}$
 $\mathcal{M} = 8 \text{ KN m}$
 $l = 4 \text{ m}$

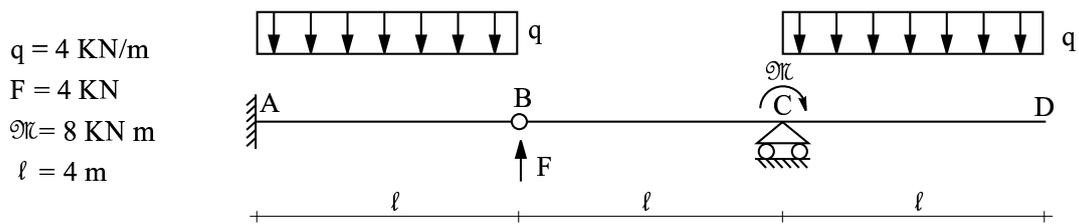


Problema 5.

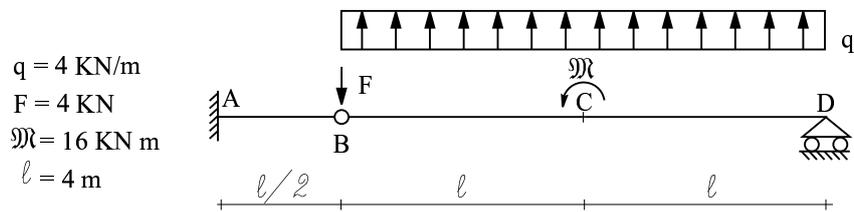
$q = 4 \text{ KN/m}$
 $F = 6 \text{ KN}$
 $\mathcal{M} = 8 \text{ KN m}$
 $l = 4 \text{ m}$



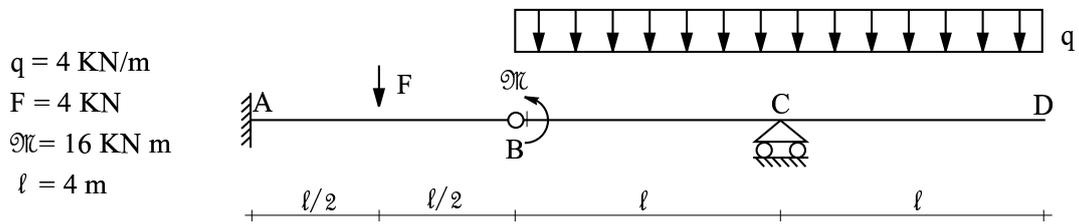
Problema 6.



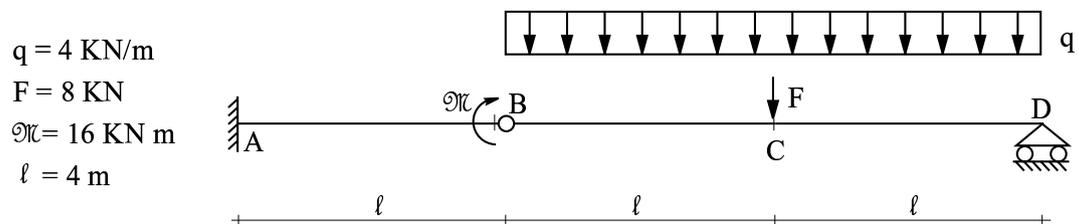
Problema 7.



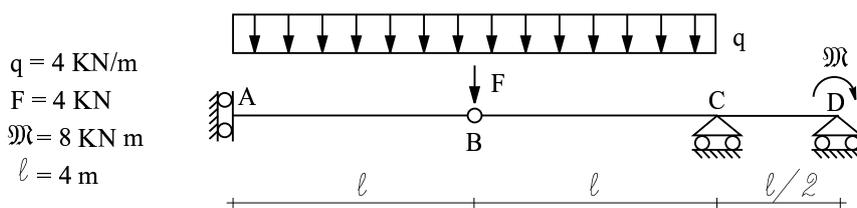
Problema 8.



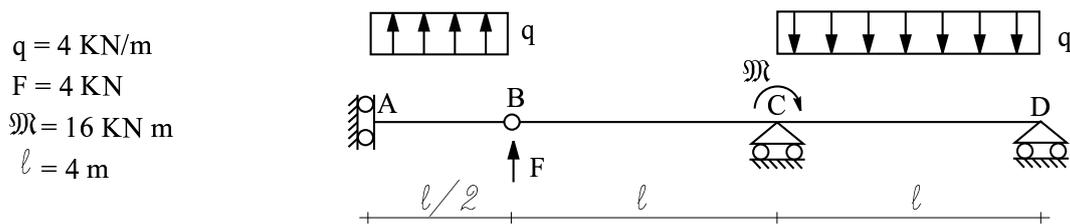
Problema 9.



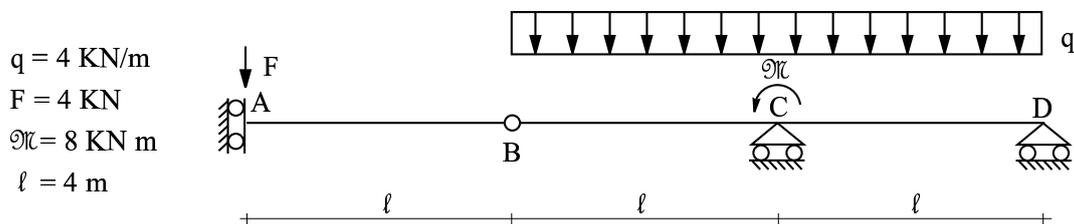
Problema 10.



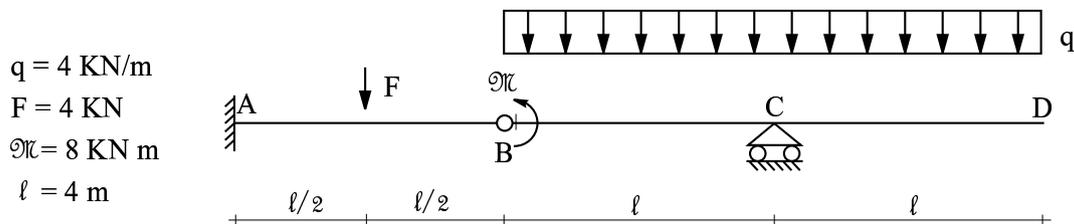
Problema 11.



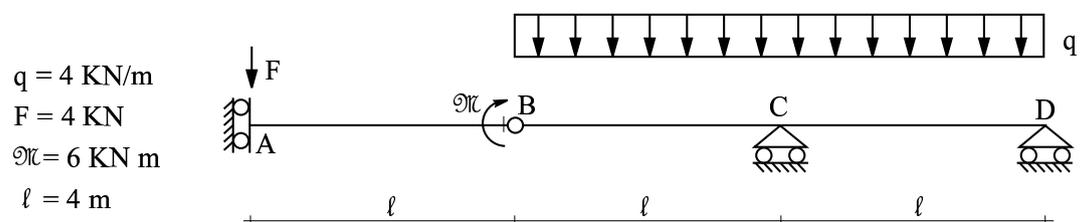
Problema 12.



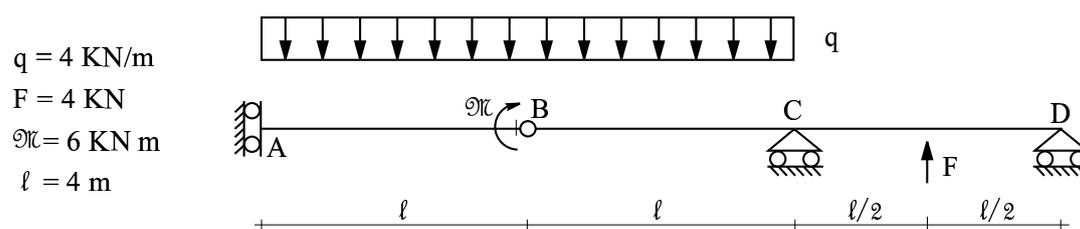
Problema 13.



Problema 14.



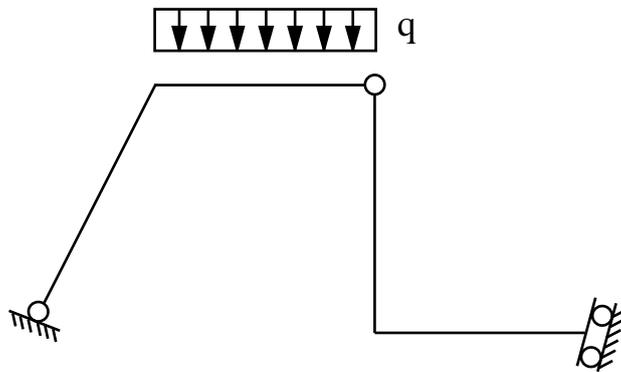
Problema 15.



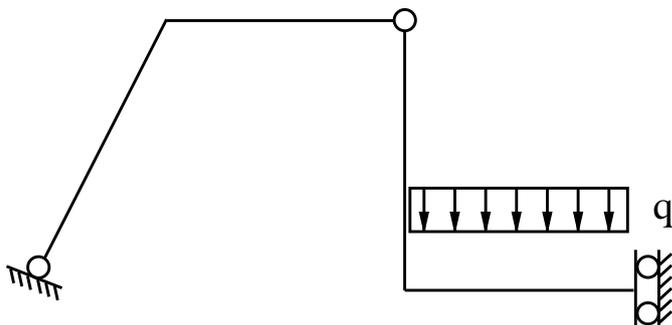
Problema 16.

Nei problemi 17-38 si richiede:

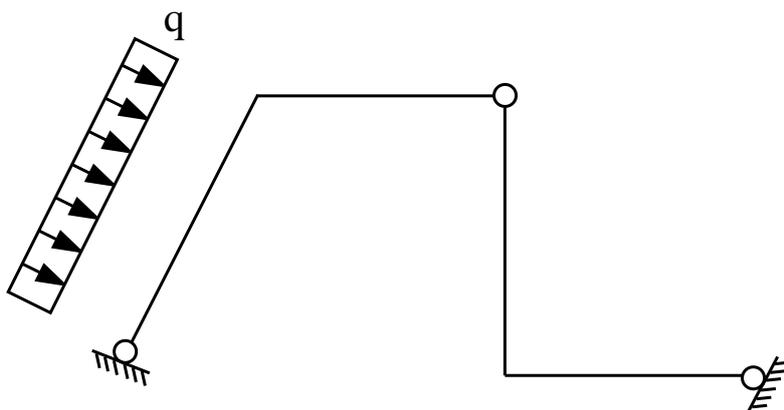
- di determinare le reazioni vincolari per via grafica;
- di tracciare il diagramma del momento per via grafica.



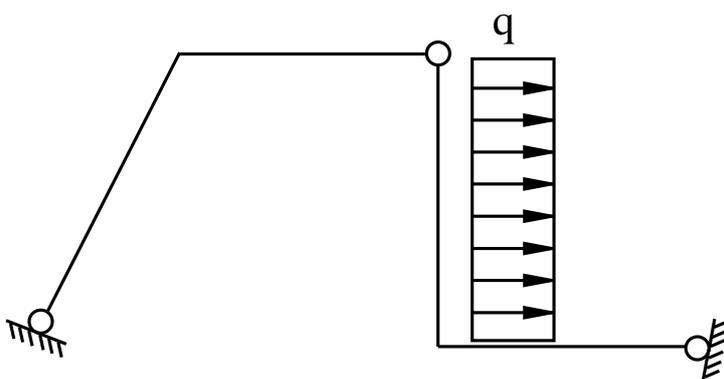
Problema 17.



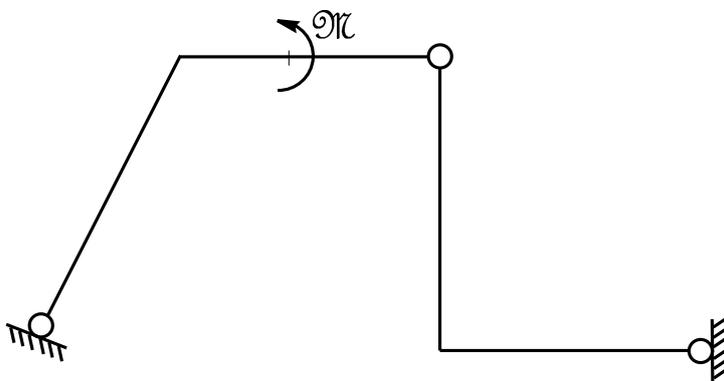
Problema 18.



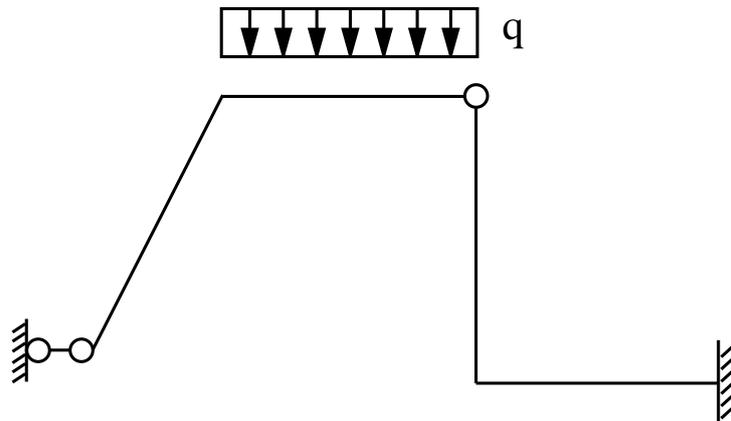
Problema 19.



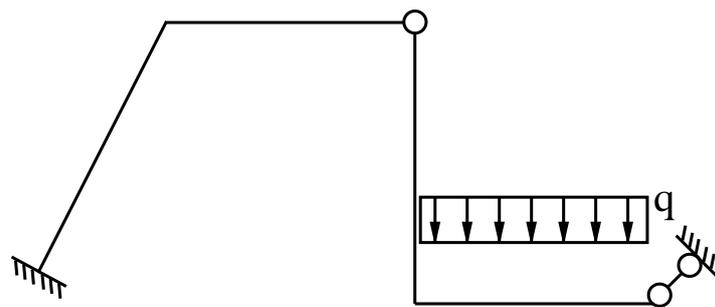
Problema 20.



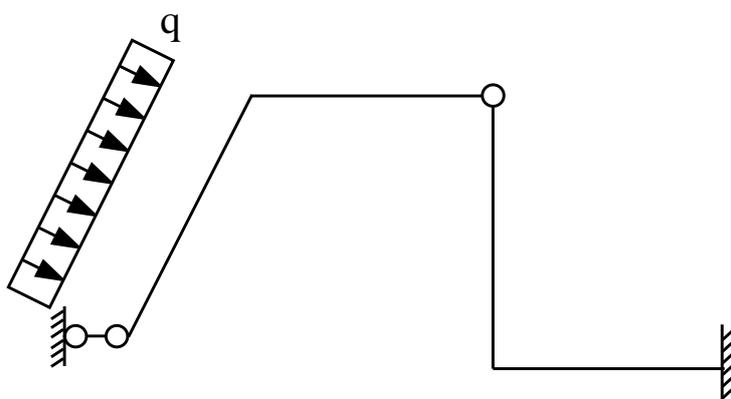
Problema 21.



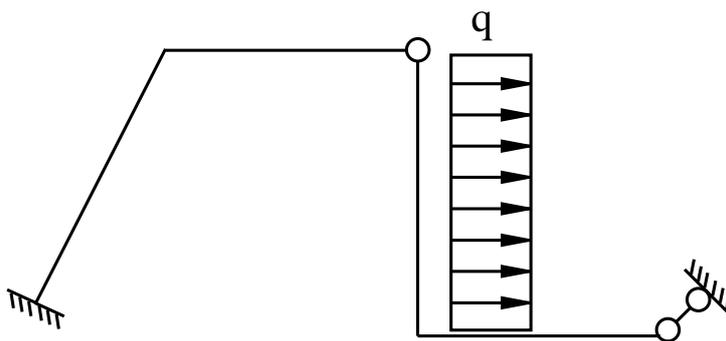
Problema 22.



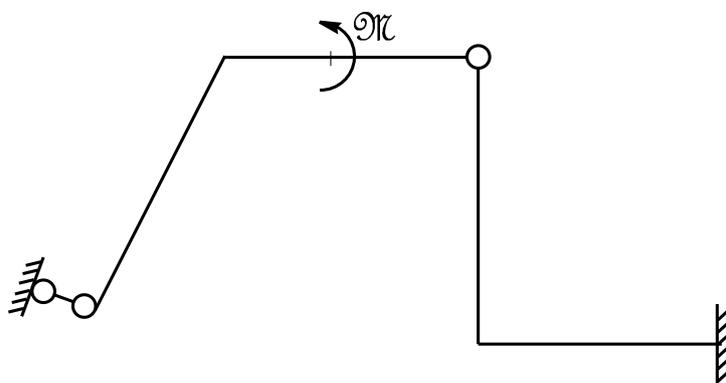
Problema 23.



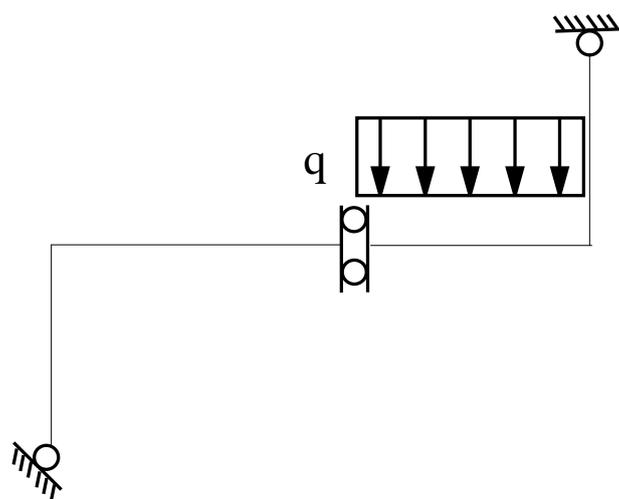
Problema 24.



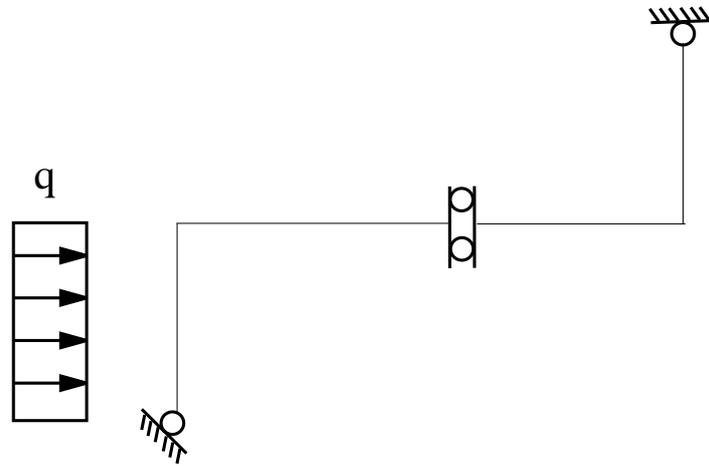
Problema 25.



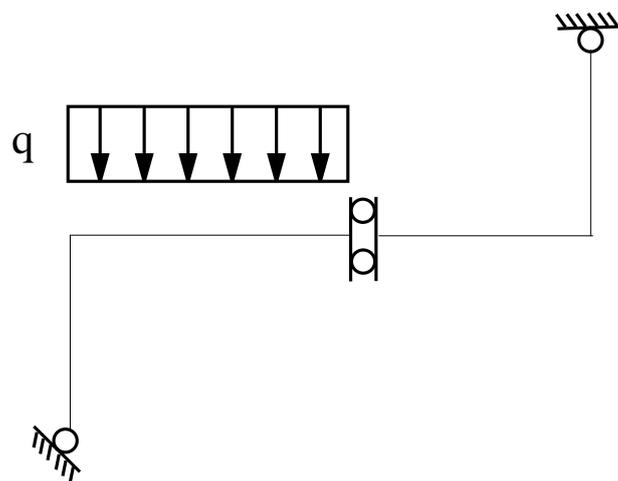
Problema 26.



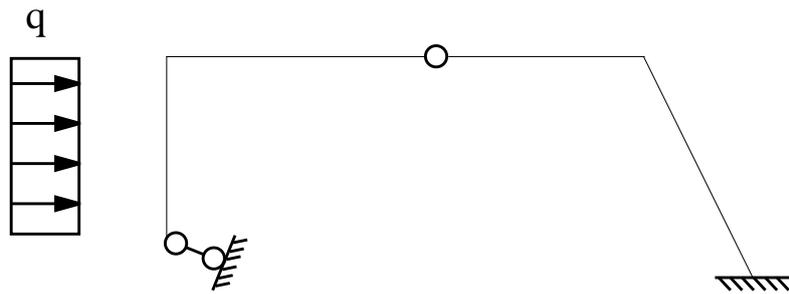
Problema 27.



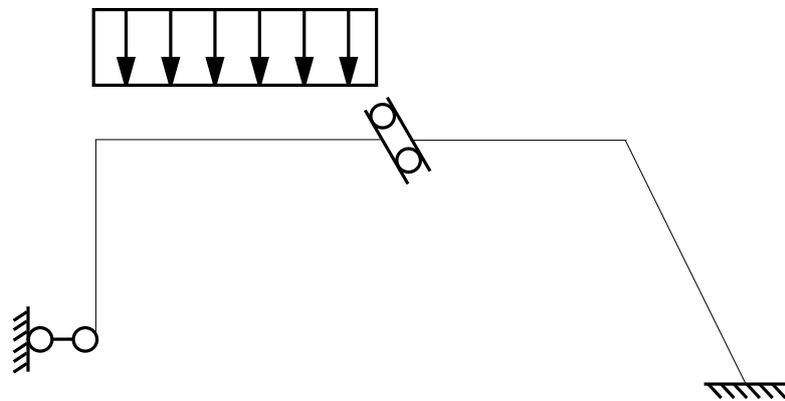
Problema 28.



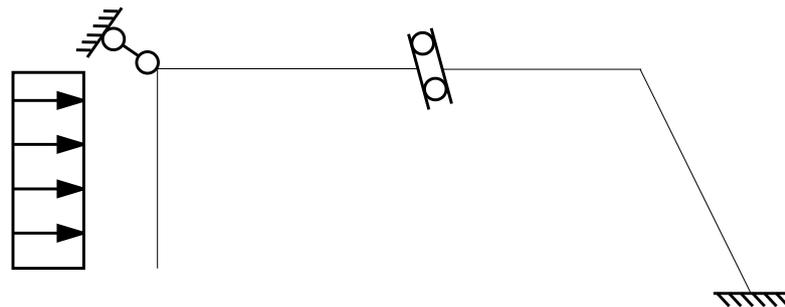
Problema 29.



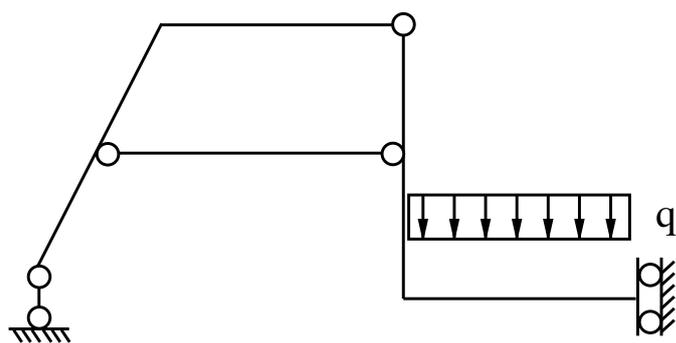
Problema 30.



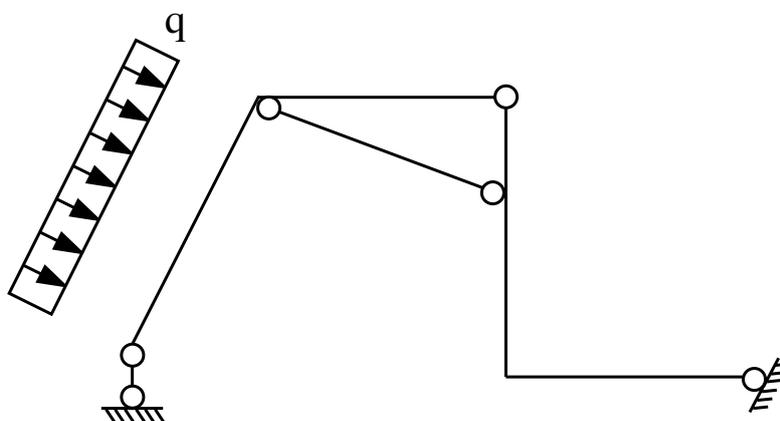
Problema 31.



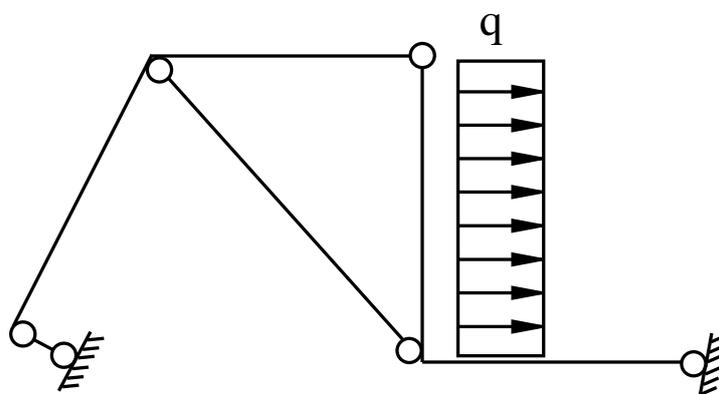
Problema 32.



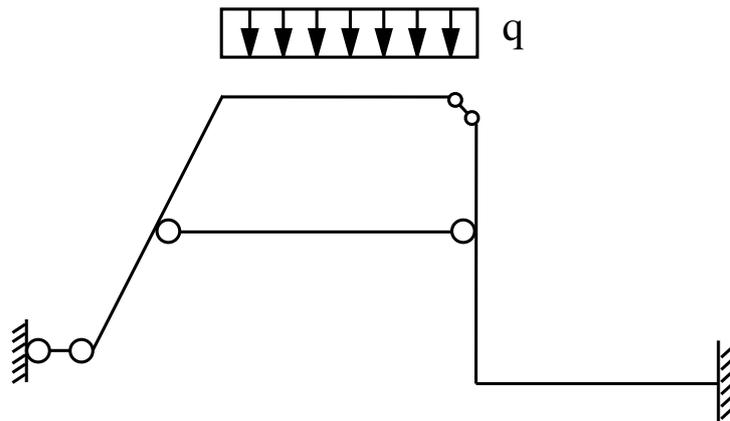
Problema 33.



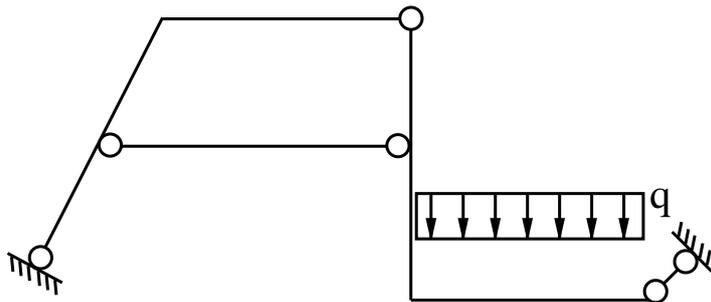
Problema 34.



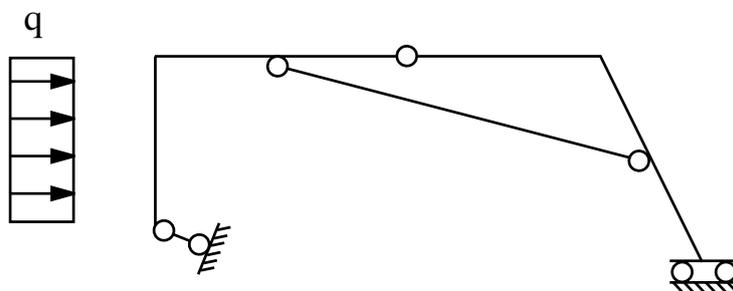
Problema 35.



Problema 36.



Problema 37.



Problema 38.

1.7 Cinematica della trave

In questa sezione si studierà il processo deformativo che porta la trave, a partire da una configurazione indeformata che si assume coincidente con quella in cui l'asse è rettilineo, in una deformata.

Si è visto che una trave ad asse rettilineo a sezione costante è definita geometricamente in una modellazione tridimensionale da un dominio Ω avente la forma di un cilindro retto. Nella modellazione tridimensionale la stessa trave è invece definita, sempre dal punto di vista geometrico, dai punti del suo asse, ovvero da un intervallo di \mathfrak{R} , e dalla geometria delle sezioni rette.

Lo studio della cinematica delle travi nella modellazione monodimensionale può essere svolto a partire da diversi insiemi di ipotesi. Da ognuno di essi scaturisce un diverso modello cinematico. Si prenderà qui in esame il più utilizzato tra i modelli cinematici, ovvero quello noto come modello di trave inflessa, o anche modello di 'Eulero-Bernoulli'. Le due ipotesi alla base di tale modello che, è bene ripetere, è di tipo monodimensionale, traggono in realtà origine da alcune supposizioni che si fanno circa la deformazione della trave nel modello tridimensionale. Le due ipotesi sono le seguenti:

- Le sezioni rette trasversali nella configurazione indeformata si conservano piane durante la deformazione.
- Le sezioni rette rimangono, oltre che piane, anche ortogonali all'asse deformato durante la deformazione.

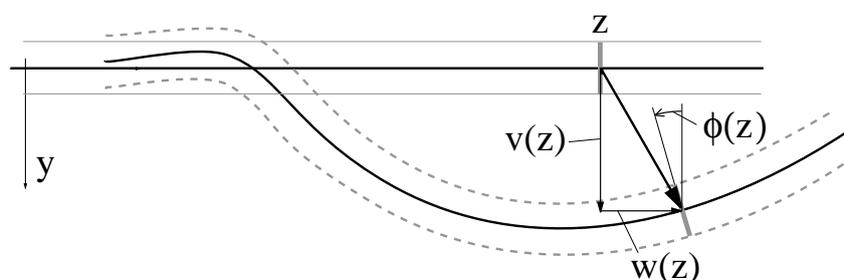


Figura 1.100: Funzioni v , w e ϕ .

La prima ipotesi è anche nota come 'principio di conservazione delle sezioni piane'. In virtù di essa ha senso considerare quali parametri cinematici da associare a ciascun punto della trave lo spostamento del punto e la rotazione della sezione. Nel caso piano in esame lo spostamento è definito da un vettore del piano della trave di componenti v secondo l'asse y e w secondo l'asse z . La rotazione è invece definita dalla sua unica componente diversa da zero, cioè quella ϕ intorno all'asse x . Come si è visto già in precedenza, ragionando direttamente nel piano essa si assume positiva se antioraria. La componente v è anche detta 'spostamento trasversale', mentre quella w è anche

detta 'spostamento assiale'. Le componenti dello spostamento e la rotazione sono in generale diverse per ogni punto dell'asse e dunque, con riferimento alla figura 1.100, sono funzioni di z definite nell'intervallo $[0, L]$.

Si considerano per semplicità separatamente i due casi in cui v e ϕ sono non nulle e w è nulla, ed in cui w è non nulla mentre v e ϕ sono nulle.

Nel primo caso, in virtù della seconda ipotesi la rotazione $\phi(z)$ è uguale in ogni punto z a quella $\alpha(z)$ della tangente all'asse. Data l'ipotesi semplificativa che w è identicamente nulla, la tangente di $\alpha(z)$ è uguale in modulo alla derivata $v'(z)$ (figura 1.101), ed opposta in segno in quanto lo spostamento v in figura è positivo se verso il basso mentre $\alpha(z)$ è positiva se antioraria. Pertanto la rotazione ϕ è legata alla funzione v dalla relazione:

$$\phi(z) = -\arctang v'(z) \quad (1.43)$$

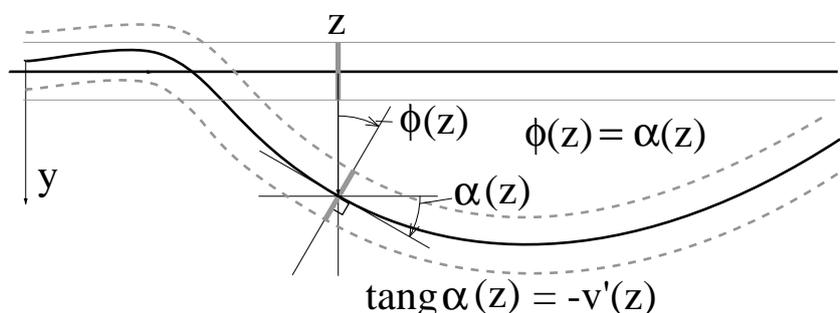


Figura 1.101: Relazione tra rotazione e spostamento trasversale.

Si definisce curvatura della trave in un punto z , e si indicherà con χ , uno scalare il cui modulo è dato dall'inverso del raggio di curvatura $R(z)$ dell'asse nel punto z nella configurazione deformata, se tale raggio è finito, ed il cui segno è uguale a quello di $\phi'(z)$. Se il raggio è infinito la curvatura si assume invece nulla. Dalla figura 1.102 si ha dunque:

$$\chi(z) = \frac{1}{R(z)} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\phi(z + \Delta z) - \phi(z)}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{ds} \quad (1.44)$$

Poiché si ha (figura 1.103):

$$\frac{ds}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta z} = \sqrt{1 + v'(z)^2} \quad (1.45)$$

ed inoltre dalla (1.43):

$$\frac{d\phi}{dz} = -\frac{v''(z)}{1 + v'(z)^2} \quad (1.46)$$

si ottiene:

$$\chi(z) = -\frac{v''(z)}{1 + v'(z)^2} \left(\frac{1}{\frac{ds}{dz}} \right) = -\frac{v''(z)}{1 + v'(z)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v'(z)^2}} \right) \quad (1.47)$$

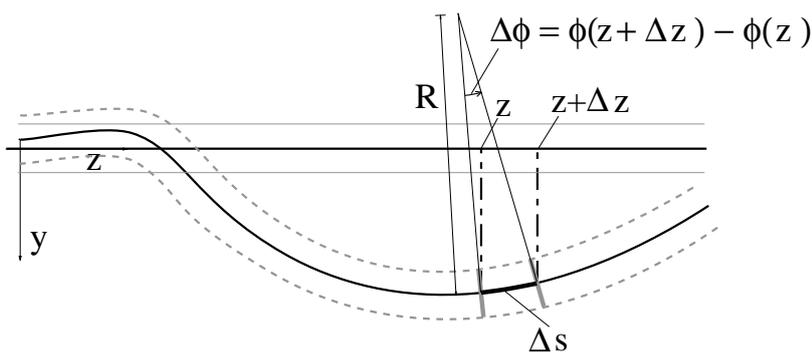


Figura 1.102: Curvatura nel tratto $[z, z + \Delta z]$.

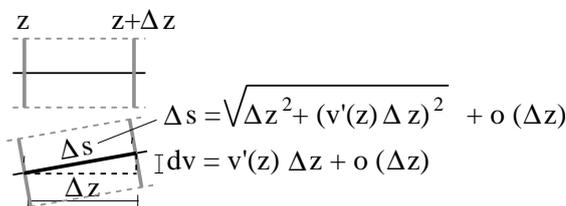


Figura 1.103: Relazione tra Δs e Δz .

e quindi la seguente relazione differenziale che lega la funzione v alla curvatura χ :

$$\chi(z) = -\frac{v''(z)}{[1 + v'(z)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.48)$$

Nel caso in cui w è non nulla mentre v e ϕ sono identicamente nulle la curvatura dell'asse della trave risulta identicamente nulla. Dati due punti rispettivamente alle ascisse z e $z + \Delta z$, la loro distanza l nella configurazione indeformata è Δz . La loro distanza l_d nella configurazione deformata è data da (figura 1.104):

$$l_d(\Delta z) = [z + \Delta z + w(z + \Delta z)] - [z + w(z)] = \Delta z + w(z + \Delta z) - w(z) \quad (1.49)$$

Si definisce deformazione assiale della trave all'ascissa z e si indica con ε_a il limite del rapporto $(l_d - l)/l$ per Δz tendente a 0. Dalla (1.49) si ricava:

$$\varepsilon_a(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{l_d - l}{l} = \frac{\Delta z + w(z + \Delta z) - w(z) - \Delta z}{\Delta z} = \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z} \quad (1.50)$$

e quindi la seguente relazione differenziale lineare che lega la funzione w alla deformazione assiale ε_a :

$$\varepsilon_a(z) = w'(z) \quad (1.51)$$

Nel seguito si farà sempre l'ipotesi che gli spostamenti e le rotazioni siano sufficientemente piccoli da poter confondere $\tan \phi$ con ϕ e da poter trascurare il termine $v'(z)^2$

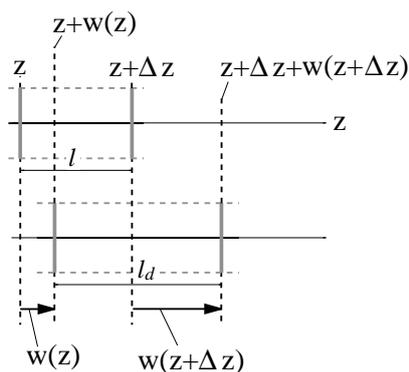


Figura 1.104: Deformazione assiale del concio elementare.

rispetto all'unità. In tal caso la relazione (1.43) si semplifica in:

$$\phi(z) = -v'(z) \quad (1.52)$$

e la relazione (1.48) si semplifica in:

$$\chi(z) = \phi'(z) = -v''(z) \quad (1.53)$$

Nel caso più generale in cui w , v e ϕ sono tutte non identicamente nulle le relazioni (1.48) e (1.51) si complicano. In particolare, χ e ε_a risultano entrambi funzioni non lineari sia di v che di w . Nell'ipotesi che gli spostamenti siano sufficientemente piccoli, che equivale a considerare trascurabili le derivate v' e w' rispetto all'unità, si ottiene però anche nel caso generale un disaccoppiamento del comportamento 'flessionale', espresso dalla relazione (1.53) da quello 'estensionale', che anche nell'ipotesi di piccoli spostamenti è espresso dalla (1.51).

E' utile sottolineare che per χ e ε_a entrambi non nulli, la deformazione assiale rappresenta la dilatazione lineare della fibra baricentrica, ovvero dell'asse della trave.

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti le relazioni che sintetizzano la cinematica del modello di trave di Eulero-Bernoulli si riassumono dunque come segue:

$$\begin{cases} \phi(z) = -v'(z) \\ \chi(z) = \phi'(z) = -v''(z) \\ \varepsilon_a(z) = w'(z) \end{cases} \quad (1.54)$$

Tali relazioni vanno affiancate da opportune condizioni al contorno fornite dalle eventuali condizioni di vincolo cinematico presenti.

La curvatura χ e la deformazione assiale ε_a possono vedersi come le 'deformazioni' nel modello di trave di Eulero-Bernoulli. Tali deformazioni sono nulle per uno spostamento rigido, in cui v'' e w' sono identicamente nulle.

1.8 Legame elastico lineare per il modello di trave piana di Eulero-Bernoulli

Fino ad ora si sono studiati due aspetti del modello di Eulero-Bernoulli per le travature piane, quello statico e quello cinematico. Per definire completamente il modello strutturale rimane da definire il legame costitutivo, ovvero la legge che lega le deformazioni del modello, ovvero nel caso in esame la deformazione assiale e la curvatura, alle caratteristiche della sollecitazione, ovvero lo sforzo normale ed il momento flettente.

La scelta del legame costitutivo più efficace dipende dal problema in esame. Qui si introdurrà un legame costitutivo di tipo elastico lineare, che non solo è il più semplice da trattare dal punto di vista matematico ma è anche estremamente efficace a riprodurre il comportamento delle travi nella maggioranza delle applicazioni ingegneristiche. Esso traduce ad un livello mediato sull'intera sezione l'ipotesi di comportamento elastico lineare di ciascun punto della sezione, comportamento che si studierà in modo più approfondito nella parte del corso sulla meccanica del continuo. Nella realtà i più comuni materiali usati per le applicazioni strutturali (ad esempio acciaio, alluminio, materiali compositi fibrorinforzati) presentano un comportamento reale che è perfettamente schematizzato da un legame elastico lineare quando le sollecitazioni non superano determinati valori limite. Altri importanti materiali, come il calcestruzzo, non presentano un comportamento perfettamente schematizzabile come elastico lineare ma anche per essi l'ipotesi di elasticità lineare fornisce un'approssimazione accettabile in moltissimi casi e sempre entro valori limitati della sollecitazione.

Il legame elastico lineare per la trave di Eulero-Bernoulli lega la deformazione assiale e la curvatura alle caratteristiche della sollecitazione mediante le seguenti due leggi di proporzionalità :

$$N = K_a \varepsilon_a \quad M = K_f \chi \quad (1.55)$$

I coefficienti K_a e K_f rappresentano rispettivamente la 'rigidezza estensionale' e la 'rigidezza flessionale' della trave. In questa trattazione tali coefficienti potrebbero essere introdotti senza altra ulteriore precisazione, semplicemente mediante la definizione (1.55). Tuttavia è utile in tale contesto fare una sorta di anticipazione di alcuni risultati, che si ricaveranno in seguito studiando un modello tridimensionale della trave, per legare le due rigidezze appena definite alle proprietà meccaniche del materiale ed a quelle geometriche della sezione retta della trave. Si limita qui l'analisi al caso delle travi con caratteristiche meccaniche omogenee, ovvero non variabili da punto a punto né lungo l'asse z né sulla sezione retta.

Trattando dapprima il caso di sola deformazione assiale, ovvero $\varepsilon_a \neq 0$ e $\chi = 0$, si consideri il concio di trave riportato in figura 1.105.a nella sua configurazione indeformata e si consideri una modellazione tridimensionale dello stesso. Si assuma inoltre che la deformazione ε_a sia costante nell'intervallo $[z, z + \Delta z]$. Tutte le fibre longitudinali saranno caratterizzate dallo stesso valore della deformazione in direzione longitudinale ε , pari proprio a ε_a (figura 1.105.b):

$$\varepsilon = \varepsilon_a = \frac{l_d - l}{l} \quad (1.56)$$

dove ancora l ed l_d indicano le lunghezze iniziale e finale della fibra.

Sulla sezione, alla deformazione ε il legame elastico associa una tensione $\sigma = dF/dA$, ovvero una forza dF per unità di superficie della sezione dA (figura 1.106), ad essa proporzionale. Il coefficiente di proporzionalità è detto ‘modulo elastico’, o ‘modulo di Young’, ed è indicato con E :

$$\sigma = E \varepsilon \quad (1.57)$$

Si è detto che si limita qui l’analisi al caso delle sezioni omogenee, per le quali il modulo elastico è costante, per cui ad un diagramma costante di deformazioni sulla sezione corrisponde un diagramma costante di tensioni¹³ pari a $\sigma = E \varepsilon_a$ (figura 1.106). In questo caso, come si vedrà meglio nel seguito del corso, il momento risultante delle tensioni σ intorno all’asse x è nullo, e quindi $M = 0$, mentre lo sforzo normale deve evidentemente euagliare la risultante delle tensioni sulla sezione, ovvero si ha:

$$N = \int_A \sigma dA = E \varepsilon_a \int_A dA = EA \varepsilon_a \quad (1.58)$$

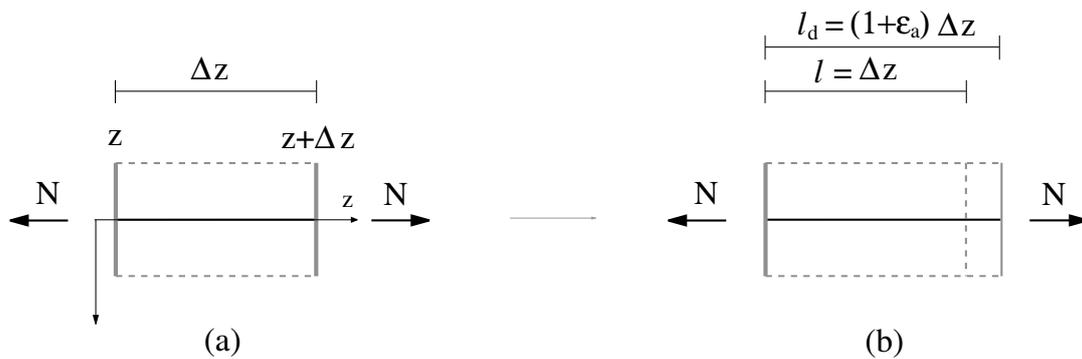


Figura 1.105: Deformazione assiale: (a) concio indeformato; (b) concio deformato.

Passando ora al caso della sola flessione, ovvero $\varepsilon_a = 0$ e $\chi \neq 0$, si consideri il concio di trave riportato in figura 1.106.a nella sua configurazione indeformata e si consideri una modellazione tridimensionale dello stesso. Si indichi per semplicità con \overline{PQ} sia il segmento congiungente due punti P e Q che la sua lunghezza. La generica fibra longitudinale della trave, avente una coordinata y nel sistema di riferimento in figura 1.107, avrà lunghezza Δz nella configurazione indeformata. Pertanto le lunghezze \overline{AB} e $\overline{A_oB_o}$ dei segmenti riportati in figura 1.107.a sono entrambe pari a Δz .

Avendosi solo deformazione flessionale, ovvero essendo $\varepsilon_a = 0$, nella configurazione deformata del concio riportata in figura 1.107.b il segmento baricentrico $\overline{A_oB_o}$ si

¹³E’ utile comunque accennare che l’estensione della trattazione al caso di travi non omogenee viene fatta conservando l’ipotesi di conservazione delle sezioni piane, per cui nel caso di pura deformazione assiale si ha ancora un diagramma costante delle deformazioni mentre il diagramma delle tensioni sulla sezione ottenuto tramite la (1.57) non sarà costante. Il caso delle travi non omogenee è peraltro di estremo interesse in quanto è quello delle travi in cemento armato, o in materiale composito fibrorinforzato.

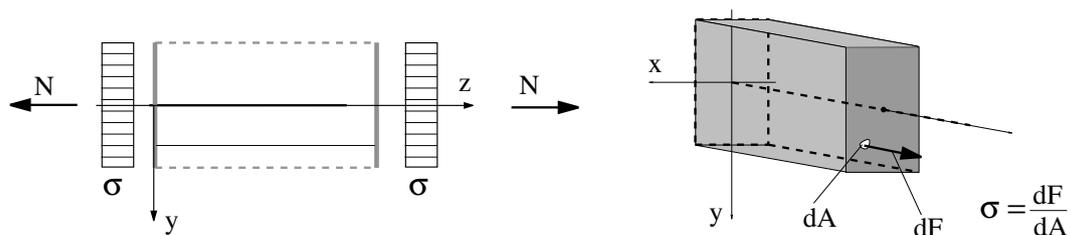


Figura 1.106: Diagramma delle tensioni sulla sezione nel caso di sola deformazione assiale.

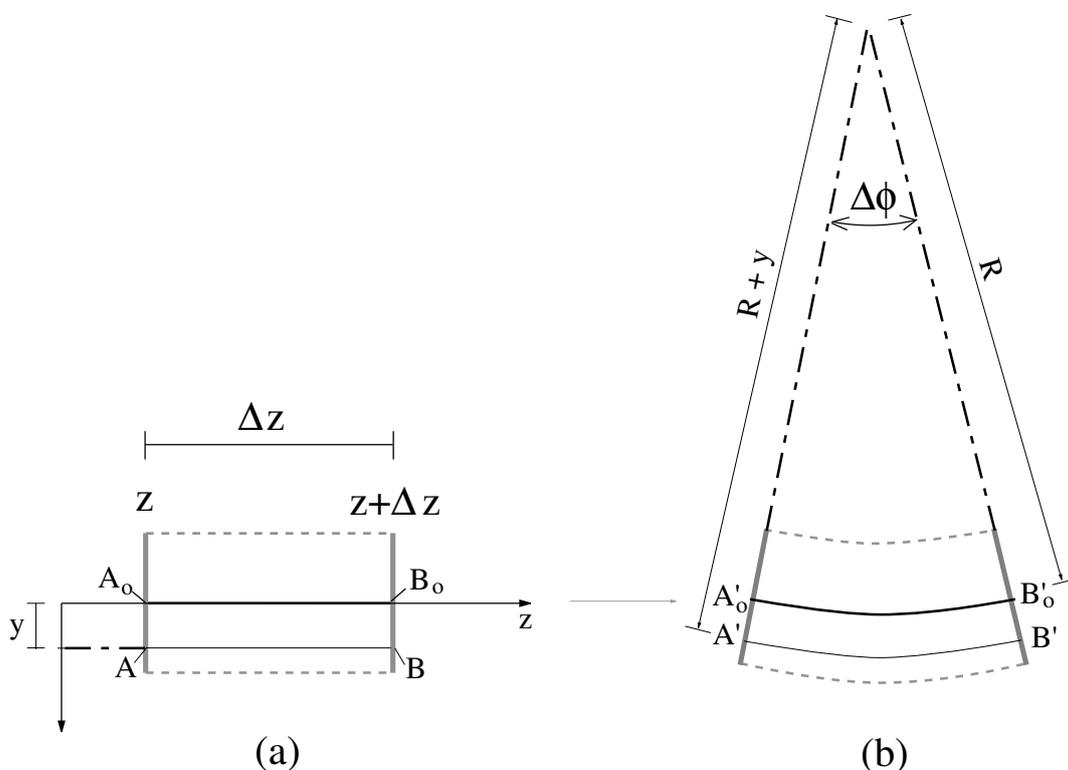


Figura 1.107: Deformazione delle fibre longitudinali nel caso di sola flessione.

trasforma in un segmento $\overline{A'_0B'_0}$ di uguale lunghezza, per cui si ha $\overline{A'_0B'_0} = \Delta z$. Invece, la lunghezza di un segmento longitudinale non baricentrico avente una coordinata y non nulla non avrà più lunghezza Δz . Se la curvatura χ è positiva, come nel caso in figura, i segmenti longitudinali posti ad $y > 0$ si allungano mentre quelli posti ad una coordinata $y < 0$ si contraggono. Considerando un valore costante della curvatura χ , l'asse baricentrico della trave e ciascuna delle altre fibre longitudinali si trasformano dopo la deformazione in un arco di cerchio, di raggio $R = 1/\chi$. Detto $\Delta\phi$ l'angolo formato tra

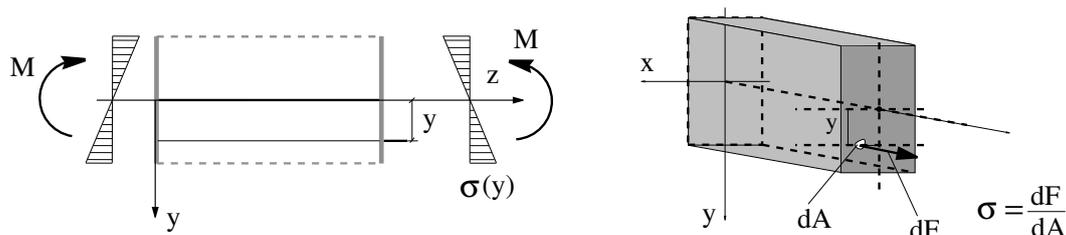


Figura 1.108: Diagramma delle tensioni sulla sezione nel caso di sola flessione.

le sezioni alle ascisse z e $z + \Delta z$ nella configurazione deformata, si ha:

$$\Delta z = \overline{AB} = \overline{A_oB_o} = \overline{A'_oB'_o} = \Delta\phi R \quad \overline{A'B'} = \Delta\phi(R + y) \quad (1.59)$$

La deformazione del segmento \overline{AB} di coordinata y è data da:

$$\varepsilon(y) = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\Delta\phi(R + y) - \Delta\phi R}{\Delta\phi R} = \frac{y}{R} = \chi y \quad (1.60)$$

Alla deformazione $\varepsilon(y)$ il legame elastico associa una tensione $\sigma(y) = E \varepsilon(y)$. Si ha quindi:

$$\sigma(y) = E \varepsilon(y) = E \chi y \quad (1.61)$$

Le caratteristiche della sollecitazione devono rappresentare un sistema equivalente all'insieme delle tensioni agenti puntualmente sulla sezione, e quindi il momento flettente M sulla sezione deve essere pari al momento risultante delle tensioni σ intorno all'asse x . Si ha dunque:

$$M = \int_A dF y = \int_A \sigma(y) y dA = E \chi \int_A y^2 dA = EI \chi \quad (1.62)$$

avendo indicato con I il 'momento d'inerzia' della sezione¹⁴, dato da:

$$I = \int_A y^2 dA \quad (1.63)$$

Si vedrà rigorosamente in seguito invece che in questo caso la risultante secondo z delle tensioni σ è nulla, per cui si ha che $N = 0$.

Concludendo, le rigidità assiale e flessionale sono date da:

$$K_a = EA \quad K_f = EI \quad (1.64)$$

¹⁴Poiché nelle travature piane la flessione della trave avviene sempre intorno all'asse x , non si mette nessun pedice per specificare che il momento d'inerzia I è quello intorno all'asse x . Analogamente si sottintende, nelle travature piane, che $M = M_x$.

e le (1.55) possono risciversi:

$$N = EA \varepsilon_a \quad M = EI \chi \quad (1.65)$$

o equivalentemente:

$$\varepsilon_a = \frac{N}{EA} \quad \chi = \frac{M}{EI} \quad (1.66)$$

Tali relazioni sono state derivate assumendo che la deformazione e la curvatura siano costanti su $[z, z + \Delta z]$. Per l'arbitrarietà di Δz evidentemente valgono anche al limite per $\Delta z \rightarrow 0$, per cui possono essere assunte come relazioni puntuali anche quando i diagrammi della deformazione assiale e della curvatura, o equivalentemente dello sforzo normale e del momento, non sono costanti.

1.8.1 Distorsioni termiche

Le deformazioni nelle strutture possono essere indotte da uno stato di sforzo interno, come si è visto nel paragrafo precedente, oppure possono essere indotte da altre azioni quali ad esempio variazioni termiche o di umidità, reazioni chimiche, cambiamenti di fase. Tali tipi di deformazioni sono dette 'distorsioni'.

Si studierà qui il caso delle distorsioni termiche, che è di grande importanza per quasi tutte le tipologie strutturali. Peraltra altri tipi di distorsioni si trattano in modo analogo.

Si consideri il generico concio di trave riportato in figura 1.109 e si assuma che sforzo normale e momento flettente siano nulli mentre la temperatura del materiale sia passata uniformemente dal valore t_o della configurazione indeformata ad un valore t , con una variazione dunque $\Delta t = t - t_o$. In questo caso la distorsione termica è detta 'uniforme' ed ogni fibra longitudinale del concio, di lunghezza iniziale $l = \Delta z$, si deforma e la sua variazione di lunghezza è pari a $l_d - l = \alpha \Delta t \Delta z$, avendo indicato con α il coefficiente di dilatazione termica del materiale, che ha le dimensioni dell'inverso di una temperatura. La deformazione assiale della trave vale dunque:

$$\varepsilon_a = \frac{l_d - l}{l} = \alpha \Delta t \quad (1.67)$$

mentre la curvatura è nulla. Si noti quando $\Delta t > 0$ la deformazione di tutte le fibre è positiva e quindi $\varepsilon_a > 0$. Ovviamente, se $\Delta t < 0$ dalla (1.67) si ottiene coerentemente che $\varepsilon_a < 0$.

Si parla invece di distorsione termica 'a farfalla' quando le fibre longitudinali sono soggette ad una variazione di temperatura rispetto a quella iniziale t_o della configurazione indeformata che è variabile linearmente con la coordinata y , e che è nulla per $y = 0$.

Dalla figura 1.110 si vede che la variazione di lunghezza $\Delta l(y)$ della fibra longitudinale di coordinata y è pari a

$$\Delta l(y) = \alpha (t(y) - t_o) \Delta z = \alpha \frac{t_i - t_s}{H} y \Delta z \quad (1.68)$$

dove H indica l'altezza della sezione, t_s e t_i indicano i valori della temperatura rispettivamente ai lembi superiore ed inferiore. Essendo $l = \Delta z$, la deformazione della fibra è dunque data da:

$$\varepsilon(y) = \frac{\Delta l(y)}{l} = \alpha \frac{t_i - t_s}{H} y \quad (1.69)$$

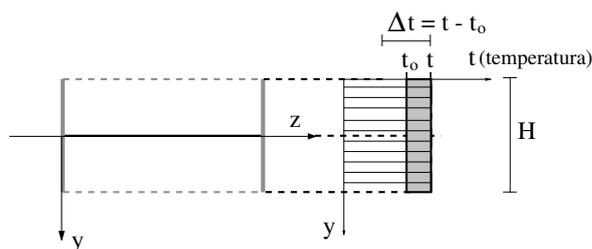


Figura 1.109: Distorsione termica uniforme.

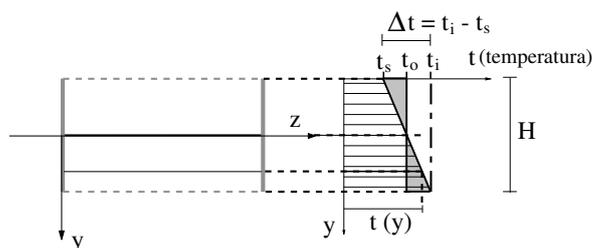


Figura 1.110: Distorsione termica 'a farfalla'.

Ponendo;

$$\varepsilon(y) = \chi y \quad (1.70)$$

ed indicando nel caso della distorsione a farfalla con $\Delta t = t_i - t_s$, si ricava:

$$\chi = \frac{\alpha \Delta t}{H} \quad (1.71)$$

mentre la deformazione assiale è nulla in quanto la fibra baricentrica rimane indeformata essendo $t(y = 0) = t_o$.

Si osserva che quando $\Delta t > 0$ la curvatura è positiva, mentre se $\Delta t < 0$ dalla (1.71) si ottiene coerentemente una curvatura negativa.

Il caso più generale di una variazione di temperatura che varia linearmente con y , ma che non si annulla per $y = 0$, può decomporsi come sovrapposizione di una distorsione uniforme e di una distorsione a farfalla.

Si noti che si è utilizzato lo stesso simbolo Δt per indicare sia il valore costante della variazione di temperatura nel caso della distorsione termica uniforme, sia la differenza tra le temperature al lembo inferiore e superiore nel caso della distorsione termica a farfalla. Ciò sia al fine di uniformarsi alla notazione classicamente utilizzata, sia perché l'ambiguità della notazione viene superata utilizzando nel disegno degli schemi strutturali simbologie diverse, come indicato in figura 1.111. In particolare, per indicare una distorsione a farfalla si utilizza la simbologia di figura 1.111.a, mentre per la distorsione uniforme si utilizza o quella di figura 1.111.b, o più semplicemente, quella di figura 1.111.c.

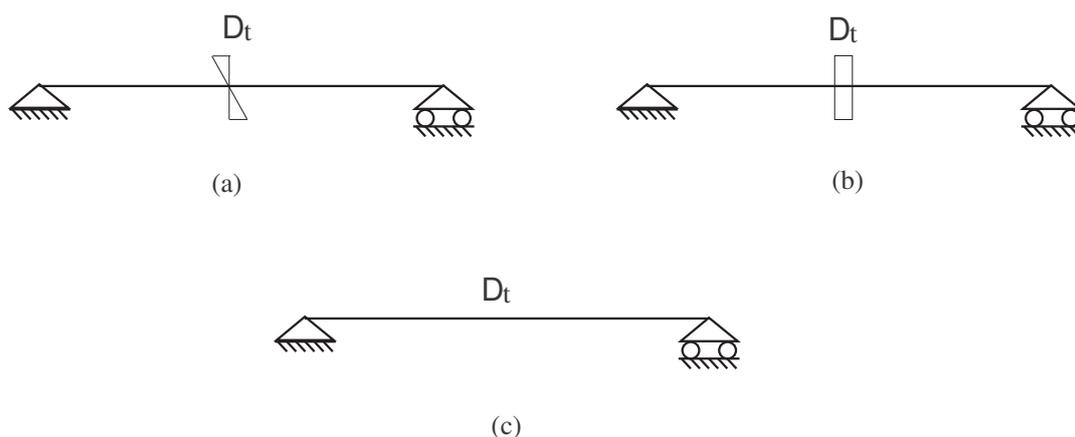


Figura 1.111: Simbologia delle distorsioni termiche.

1.8.2 Sovrapposizione delle deformazioni elastiche e delle distorsioni

Si consideri ora il caso più generale in cui il comportamento del materiale è elastico lineare e le deformazioni nella trave siano indotte sia dalla presenza sia di caratteristiche della sollecitazione non nulle che di distorsioni termiche di tipo sia uniforme che a farfalla.

Valendo il principio della sovrapposizione degli effetti, i valori della deformazione assiale e della curvatura si ottengono allora come somma di quelli che si otterrebbero in presenza solamente delle caratteristiche della sollecitazione e di quelli dovuti solamente alle distorsioni termiche. In particolare, la deformazione assiale e la curvatura si decompongono nella somma di una parte elastica, ε^{el} ed χ^{el} , e di una dovuta alle distorsioni, ε^{dist} ed χ^{dist} . Nel caso delle distorsioni termiche visto in precedenza si ha in particolare:

$$\varepsilon_a^{el} = \frac{N}{EA} \quad \varepsilon_a^{dist} = \alpha \Delta t \quad \chi^{el} = \frac{M}{EI} \quad \chi^{dist} = \frac{\alpha \Delta t}{H} \quad (1.72)$$

da cui si ricavano le seguenti relazioni generali:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a^{el} + \varepsilon_a^{dist} = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta t \quad \chi = \chi^{el} + \chi^{dist} = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta t}{H} \quad (1.73)$$

1.9 Il problema dell'equilibrio elastico per il modello di Eulero-Bernoulli

L'insieme delle equazioni differenziali (1.51) e (1.53), che definiscono la cinematica del modello di Eulero-Bernoulli, delle equazioni (1.73), che rappresentano il legame elastico lineare in presenza di distorsioni termiche, e delle equazioni differenziali di equilibrio (1.24)₁ e (1.25), insieme alle condizioni al contorno di carattere statico e

cinematico, definiscono il problema dell'equilibrio elastico per tale modello. Esse si riportano di seguito:

$$\text{Problema dell'equilibrio elastico} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{cinematica} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_a = w' \\ \chi = \phi' = -v'' \end{array} \right. \\ \text{legame elastico} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_a = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta t \\ \chi = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta t}{H} \end{array} \right. \\ \text{equilibrio} \quad \left\{ \begin{array}{l} N' = -p \\ M'' = -q \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.74)$$

Le condizioni al contorno possono essere di tipo statico, del tipo di quelle studiate nella sezione 1.4.4, o di tipo cinematico.

In tale problema sono assegnati la geometria della travatutra piana (gli assi delle travi che la compongono e le sezioni rette delle travi), i parametri del materiale (il modulo di Young E ed il coefficiente di dilatazione lineare α), i vincoli e le azioni (forze, coppie, carichi distribuiti, distorsioni termiche e cedimenti). Le incognite sono le funzioni spostamento assiale w e trasversale v , le deformazioni del modello, ovvero la deformazione assiale ε_a e la curvatura χ , nonché le caratteristiche della sollecitazione N ed M .

Esprimendo queste ultime in funzione di ε_a e χ mediante le inverse delle (1.74)₃₋₄ si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = EA(\varepsilon_a - \alpha \Delta t) \\ M = EI \left(\chi - \frac{\alpha \Delta t}{H} \right) \end{array} \right. \quad (1.75)$$

Sostituendo in tali relazioni, ad ε_a e χ , le relazioni cinematiche (1.74)₁₋₂ si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = EA(w' - \alpha \Delta t) \\ M = EI \left(-v'' - \frac{\alpha \Delta t}{H} \right) \end{array} \right. \quad (1.76)$$

Sostituendo infine queste ultime espressioni nelle equazioni differenziali di equilibrio (1.74)₅₋₆ si ricava:

$$\left\{ \begin{array}{l} [EA(w' - \alpha \Delta t)]' = -p \\ \left[EI \left(-v'' - \frac{\alpha \Delta t}{H} \right) \right]'' = -q \end{array} \right. \quad (1.77)$$

Le equazioni (1.77) forniscono la cosiddetta 'formulazione agli spostamenti' del problema dell'equilibrio elastico, e sono anche note come 'equazioni della linea elastica'. In esse le uniche incognite rimaste sono le funzioni spostamento w e v , note le quali è possibile ricavare le deformazioni e le caratteristiche rispettivamente mediante (1.74)₁₋₂ e

le (1.75). Le (1.77) sono valide nel caso generale in cui sia le rigidezze EA ed EI che le distorsioni termiche sono variabili da punto a punto (purché continue e sufficientemente derivabili).

Nel caso in cui le rigidezze EA ed EI sono costanti, o almeno costanti a tratti, e le distorsioni termiche sono nulle le (1.77) si specializzano come segue:

$$\begin{cases} EA w'' = -p \\ EI v'''' = q \end{cases} \quad (1.78)$$

Si vede inoltre facilmente che, se il coefficiente α è costante, le (1.78) valgono anche in presenza di una distorsione termica uniforme costante con z e di una a farfalla variabile linearmente con z . Alle (1.77) e (1.78) bisogna ovviamente aggiungere le opportune condizioni al contorno.

1.9.1 Esistenza ed unicità

Esistenza

E' possibile dimostrare che, per una struttura labile, la soluzione del problema dell'equilibrio elastico formulato nella sezione precedente esiste se e solo se esiste quella dell'equilibrio. Ciò implica che per una struttura non labile la soluzione esiste sempre.

Unicità

Se la soluzione esiste si dimostra che essa è unica in termini di deformazioni ε_a e χ ed in termini di caratteristiche della sollecitazione N e M , mentre è definita a meno di un arbitrario spostamento rigido infinitesimo (consentito dai vincoli) in termini di spostamenti.

Evidentemente per strutture non labili non esistono spostamenti rigidi infinitesimi consentiti dai vincoli, per cui la soluzione in questo caso è unica anche in termini di spostamenti.

Tale risultato è noto come 'principio di Kirchhoff' e la sua dimostrazione si basa sulle ipotesi di piccoli spostamenti e di comportamento elastico del materiale.

1.9.2 Principio di sovrapposizione degli effetti

Le equazioni che definiscono il problema dell'equilibrio elastico sono lineari. Ciò significa che se si amplificano tutte le azioni (forze, coppie, carichi, distorsioni e cedimenti) per un unico fattore λ , tutti gli effetti (spostamenti, deformazioni e caratteristiche della sollecitazione) sono moltiplicati per λ .

Più in generale, si vede facilmente che, dato un sistema di azioni \mathcal{A} ottenuto come sovrapposizione di singole azioni \mathcal{A}_i , la soluzione si ottiene sommando fra loro le soluzioni ottenute per ciascuna delle singole azioni \mathcal{A}_i .

Tale risultato è noto come 'principio di sovrapposizione degli effetti', e la sua validità dipende dalla validità delle ipotesi che hanno condotto alla linearità delle equazioni, ovvero la piccolezza degli spostamenti ed il comportamento elastico lineare.

1.9.3 Integrazione delle equazioni della linea elastica: cenni al caso generale.

In generale, la soluzione delle equazioni (1.77) o, nel caso più semplice, le (1.78), si ricava in modo analogo sia per le strutture isostatiche che per quelle iperstatiche. Inoltre la travatura può essere costituita da travi i cui assi sono tutti appartenenti ad una stessa retta (trave ad asse rettilineo), oppure può essere costituita anche da un sistema piano di travi, ciascuna rettilinea, i cui assi però non appartengono ad una stessa retta (telaio). In entrambi i casi conviene scrivere le equazioni differenziali separatamente in ciascun tratto in cui le espressioni sono costanti.

Con riferimento alla trave ad asse rettilineo di figura 1.112, per gli integrali indefiniti delle funzioni v e w si ricavano espressioni diverse nei tratti AB , BC e CD , in funzione di un certo numero di costanti di integrazione. Queste ultime si determinano imponendo delle condizioni al contorno nei punti A , B , C e D . Alcune di queste sono di carattere statico, cioè sul momento e sullo sforzo normale, del tipo di quelle studiate nella sezione 1.4.4, mentre altre sono di carattere cinematico, del tipo di quelle che si studieranno nella sezione che segue.

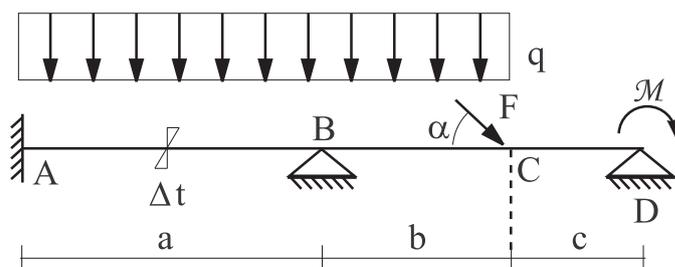


Figura 1.112: Problema dell'equilibrio elastico per una trave iperstatica ad asse rettilineo orizzontale.

1.9.4 Integrazione delle equazioni della linea elastica: le travi isostatiche e gli schemi noti

Si è visto che per le travature isostatiche è possibile calcolare i diagrammi delle caratteristiche indipendentemente dalla deformabilità della struttura, fatta salva la validità dell'ipotesi di piccoli spostamenti. In altri termini, le equazioni di equilibrio (1.74)₅₋₆, insieme alle condizioni al contorno di tipo statico, possono essere risolte indipendentemente dalla soluzione delle (1.74)₁₋₄.

Una volta note le caratteristiche N e M , dalle (1.74)₃₋₄ si ricavano le deformazioni ε_a e χ e dunque è possibile ricavare gli spostamenti mediante semplice integrazione delle (1.74)₁₋₂.

Si consideri allora lo schema di figura 1.113. Evidentemente lo sforzo normale è identicamente nullo. Non essendoci nessuna distorsione termica uniforme si ha $w' = 0$, da cui si ottiene un valore costante di w . Essendo poi $w(0) = 0$ si ricava che w è identicamente nulla, come peraltro intuibile.

Per ricavare l'espressione di v , si parte dall'espressione del momento flettente:

$$M(z) = -F(L - z) \quad (1.79)$$

Essendo nulla la distorsione termica a farfalla si ricava l'espressione della curvatura:

$$\chi(z) = -v''(z) = -\frac{F}{EI}(L - z) \quad (1.80)$$

Integrando due volte si ottiene:

$$v(z) = c_1 + c_2 z + \frac{FLz^2}{2EI} - \frac{Fz^3}{6EI} \quad (1.81)$$

e l'espressione della rotazione:

$$\phi(z) = -v'(z) = -c_2 - \frac{FLz}{EI} + \frac{Fz^2}{2EI} \quad (1.82)$$

Le condizioni al contorno da scrivere sono di tipo cinematico, in quanto riguardano solamente spostamenti e/o rotazioni. In questo caso esse sono:

$$v(0) = 0 \quad \phi(0) = 0 \quad (1.83)$$

e forniscono valori nulli delle costanti, cioè $c_1 = c_2 = 0$. Si ottiene in definitiva:

$$v(z) = \frac{FLz^2}{2EI} - \frac{Fz^3}{6EI} \quad \phi(z) = -\frac{FLz}{EI} + \frac{Fz^2}{2EI} \quad (1.84)$$

Per $z = L$ si ottengono i valori dello spostamento e della rotazione in B riportati in figura 1.113.

Nello schema della mensola con carico distribuito di figura 1.114 si ricava analogamente $w = 0$, mentre per lo spostamento trasversale si ha:

$$M(z) = -\frac{qL^2}{2} + qLz - \frac{qz^2}{2}$$

$$\chi(z) = -v''(z) = -\frac{qL^2}{2EI} + \frac{qLz}{EI} - \frac{qz^2}{2EI} \quad (1.85)$$

$$v(z) = c_1 + c_2 z + \frac{qL^2 z^2}{4EI} - \frac{qLz^3}{6EI} + \frac{qz^4}{24EI}$$

$$\phi(z) = -c_2 - \frac{qL^2 z}{2EI} + \frac{qLz^2}{2EI} - \frac{qz^3}{6EI}$$

Tenendo conto delle medesime condizioni al contorno (1.83) si ottiene $c_1 = c_2 = 0$ da cui:

$$v(z) = \frac{qL^2 z^2}{4EI} - \frac{qLz^3}{6EI} + \frac{qz^4}{24EI} \quad (1.86)$$

$$\phi(z) = -\frac{qL^2 z}{2EI} + \frac{qLz^2}{2EI} - \frac{qz^3}{6EI}$$

che per $z = L$ forniscono i valori riportati in figura 1.114.

Per lo schema della mensola con la distorsione termica costante di figura 1.115 si ha:

$$\chi(z) = -v''(z) = \frac{\alpha \Delta t}{H} \quad (1.87)$$

da cui integrando e tenendo conto delle condizioni al contorno (1.83):

$$v(z) = -\frac{\alpha \Delta t z^2}{2H} \quad \phi(z) = \frac{\alpha \Delta t z}{H} \quad (1.88)$$

da cui i valori riportati in figura.

Per la trave di figura 1.116 essendo nulle sia la curvatura elastica che quella anelastica si ha $v'' = 0$, da cui: $v(z) = c_1 + c_2 z$, ovvero uno spostamento rigido. Le condizioni al contorno (1.83) impongono però $v = 0$ identicamente.

Per lo spostamento assiale w , invece, si ha:

$$N(z) = F \Rightarrow \varepsilon_a(z) = w'(z) = \frac{F}{EA} \Rightarrow w(z) = c_1 + \frac{F}{EA} z \quad (1.89)$$

Dalla condizione al contorno $w(0) = 0$ si ottiene $c_1 = 0$ e quindi:

$$w(z) = \frac{F}{EA} z \quad (1.90)$$

da cui il valore dello spostamento in B riportato in figura.

Per gli schemi delle figure 1.119-1.124 si opera in modo analogo. Ciò che cambia sono le condizioni al contorno, che per la trave appoggiata di lunghezza L e con ascissa $z \in [0, L]$ sono date da:

$$v(0) = v(L) = 0 \quad (1.91)$$

Inoltre, per la trave appoggiata con la forza verticale in mezzeria di figura 1.119 bisogna dividere il dominio di integrazione nei due tratti a sinistra e a destra di M e scrivere in M le condizioni di continuità per gli spostamenti a destra ed a sinistra di M , $v_{M,s}$ e $v_{M,d}$ nonché per le rotazioni a sinistra e a destra $\phi_{M,s}$ e $\phi_{M,d}$:

$$v_{M,s} = v_{M,d} \quad \phi_{M,s} = \phi_{M,d} \quad (1.92)$$

La soluzione dei problemi delle figure 1.113-1.124 sono estremamente utili ed i relativi schemi verranno in seguito indicati come 'schemi noti'. La soluzione di molti problemi, sia per travature isostatiche che iperstatiche, è spesso ricavabile mediante un opportuno utilizzo dei risultati per gli schemi noti.

Pertanto conviene ricordare i risultati di tali schemi a memoria. A tale scopo è utile verificare che una semplice analisi dimensionale consente di ricavare, in modo non mnemonico, l'esponente di L in ciascuno dei risultati degli schemi noti, per cui è necessario ricordare solamente il coefficiente che compare a denominatore nelle formule che forniscono spostamenti e rotazioni.

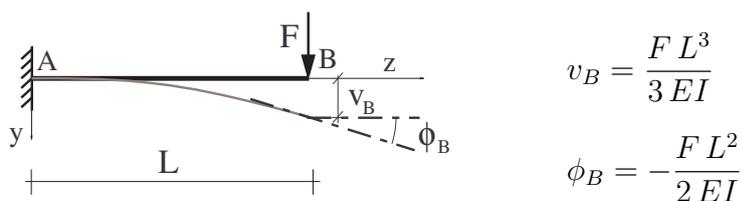


Figura 1.113: Trave a mensola con forza trasversale all'estremità.

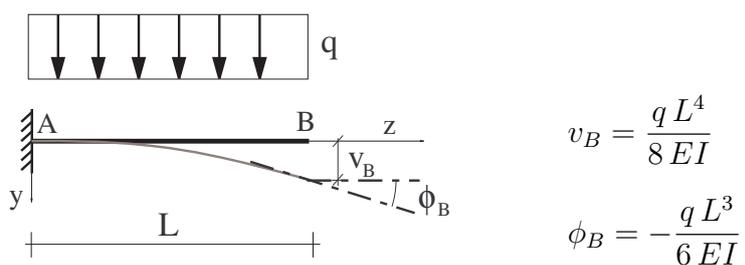


Figura 1.114: Trave a mensola con carico distribuito trasversale.

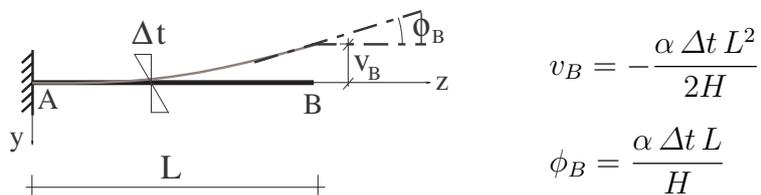


Figura 1.115: Trave a mensola con distorsione termica a farfalla.

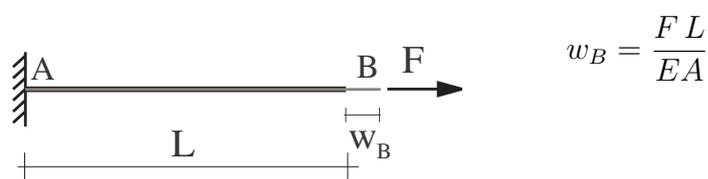


Figura 1.116: Trave a mensola con forza orizzontale all'estremità.

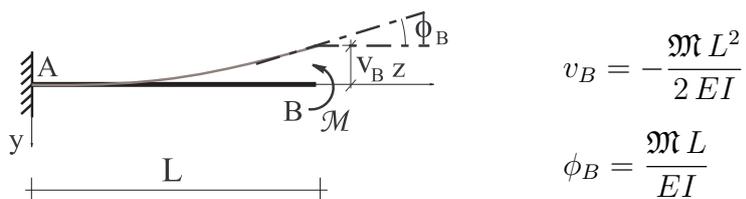


Figura 1.117: Trave a mensola con coppia all'estremità.

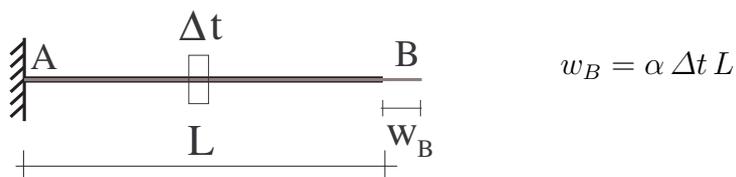


Figura 1.118: Trave a mensola con distorsione termica uniforme.

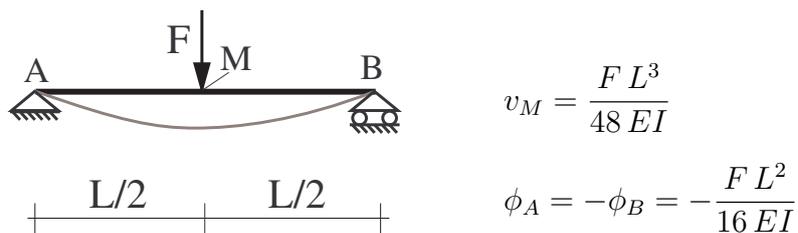


Figura 1.119: Trave appoggiata con forza trasversale in mezzeria.

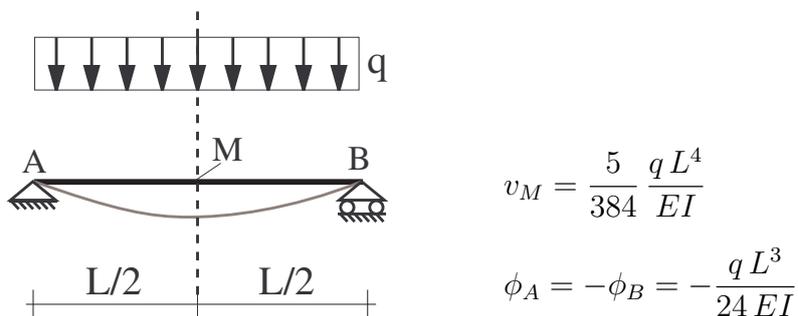


Figura 1.120: Trave appoggiata con carico distribuito trasversale.

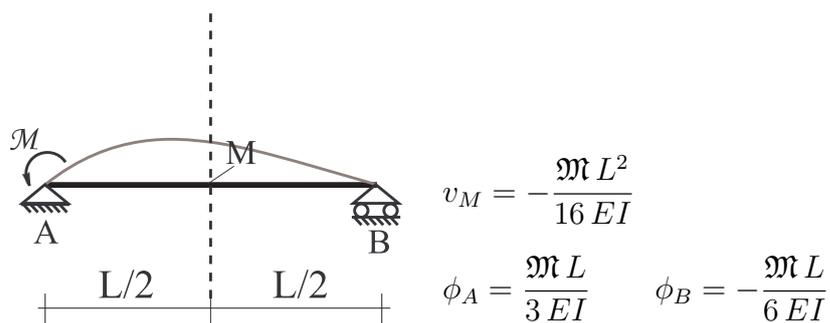


Figura 1.121: Trave appoggiata con coppia ad un estremo.

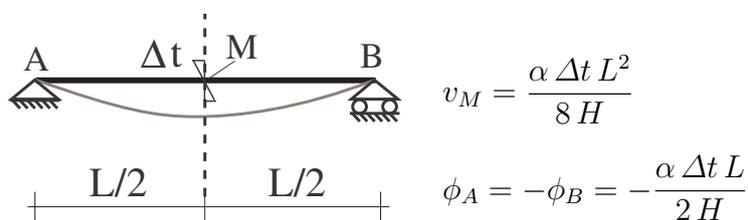


Figura 1.122: Trave appoggiata con distorsione a farfalla.

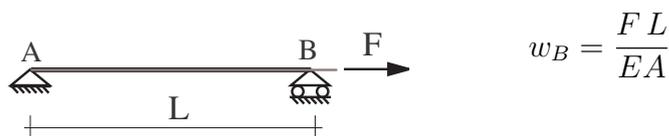


Figura 1.123: Trave appoggiata con forza orizzontale all'estremità.

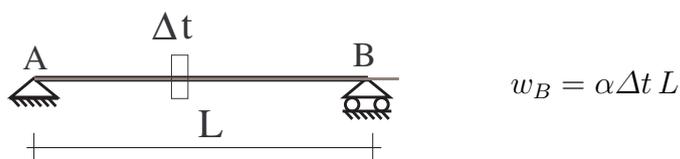


Figura 1.124: Trave appoggiata con forza orizzontale all'estremità.

1.10 Travi iperstatiche ad asse rettilineo

Per le travature iperstatiche si è visto che la soluzione dell'equilibrio non è unica. Per una travatura N volte iperstatiche esistono infatti ∞^N soluzioni del problema dell'equilibrio. Ciascuna di queste si dice anche una 'soluzione equilibrata'.

Si è visto però che, in virtù del principio di unicità di Kirchhoff, per una travatura iperstatica (non labile) la soluzione del problema dell'equilibrio elastico è unica. Essa va quindi trovata necessariamente mettendo in gioco anche la deformabilità della struttura e dunque le relazioni (1.74)₁₋₄.

Il metodo che si illustra di seguito per la soluzione di travi iperstatiche ad asse rettilineo è noto come 'metodo delle equazioni di congruenza', o anche come 'metodo delle forze'. Con esso si determina tra tutte le ∞^N soluzioni equilibrate l'unica che è anche congruente.

1.10.1 Problema 1

Per illustrare il metodo si considera la trave una volta iperstatica di figura 1.125.a. Se si elimina l'appoggio in B , che è un vincolo semplice, lo schema che si ottiene è un sistema isostatico. Per ottenere uno schema isostatico equivalente a quello reale bisogna aggiungere la reazione del vincolo eliminato, indicata in figura con X , ed imporre una condizione di congruenza in B .

La condizione di congruenza si ottiene facilmente tenendo conto che, nello schema reale, il vincolo in B esiste ed impone la condizione $v_B = 0$. Lo schema di figura 1.125.b, combinato con l'equazione di congruenza $v_B = 0$, è detto allora 'sistema isostatico equivalente'.

La reazione X del vincolo eliminato è detta 'incognita iperstatica' o anche 'reazione iperstatica'.

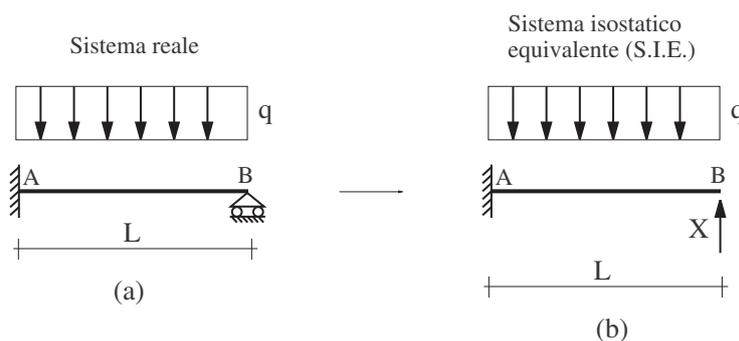


Figura 1.125: Problema 1: (a) sistema reale; (b) sistema isostatico equivalente.

L'equazione di congruenza si scrive tenendo conto che lo schema di figura 1.125.b è dato dalla sovrapposizione di uno schema con il solo carico q e di uno con la sola forza X . Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, nonché i risultati degli

schemi noti, si ottiene allora:

$$v_B = v_B^q + v_B^X = \frac{q L^4}{8 EI} - \frac{X L^3}{3 EI} \quad (1.93)$$

avando indicato con v_B^q e v_B^X rispettivamente gli spostamenti verticali in B per effetto del solo carico q e della sola forza X . L'equazione di congruenza si scrive semplicemente uguagliando a zero l'espressione precedente:

$$v_B^q + v_B^X = \frac{q L^4}{8 EI} - \frac{X L^3}{3 EI} = 0 \quad (1.94)$$

da cui si ottiene:

$$X = \frac{3}{8} q L \quad (1.95)$$

Si noti che quando si è introdotta l'incognita iperstatica X non era noto il verso della reazione in B . Pertanto la posizione fatta implicitamente nella figura 1.125.b è che se X è positiva allora la reazione in B è diretta verso l'alto, mentre se X è negativa, la reazione in B è diretta verso il basso. Dal risultato ottenuto si evince che la reazione in B è diretta verso l'alto.

Nella figura 1.126 sono riportate anche le deformate dovute al solo carico ed alla sola incognita iperstatica X . Queste sono ottenute 'a maniera', ovvero in modo approssimato ma allo stesso tempo molto vicino al vero (a meno della scala ovviamente) tenendo conto della curvatura indotta dal diagramma del momento e dalle condizioni al contorno che impongono nel caso in esame spostamento e rotazione nulla sull'incastro.

Si vede in particolare che per effetto del solo carico il punto B si abbasserebbe e che dunque affinché la forza X ripristini la congruenza ed annulli lo spostamento in B essa deve essere diretta verso l'alto.

Nota l'incognita iperstatica X è possibile ricavare il diagramma del momento semplicemente guardando la X come una forza nota e operare direttamente sullo schema isostatico equivalente.

1.10.2 Problema 2

Nel problema di figura 1.127.a si è anche introdotto un cedimento di rotazione nell'incastro pari a γ . Ciò vuol dire che le condizioni vincolari imposte dall'incastro non sono più $v_A = \phi_A = 0$, ma bensì $v_A = 0$ e $\phi_A = \gamma$.

Inoltre, nel risolvere il problema 2 si vuole anche mostrare che la scelta del sistema isostatico equivalente non è univoca. E' possibile infatti eliminare un vincolo esterno semplice diverso dal carrello in B , ottenendo così un S.I.E. diverso da quello scelto nel problema 1. Sarebbe possibile anche eliminare un vincolo interno semplice, come si vedrà meglio in seguito.

Avendo 'declassato' l'incastro rendendolo una cerniera, nel S.I.E. bisogna aggiungere la coppia reattiva dell'incastro come incognita iperstatica X e scrivere una corrispondente equazione di congruenza. In questo caso, però, nel sistema reale l'incastro non impone una rotazione nulla ma bensì una rotazione pari a γ , per cui l'equazione di congruenza si scrive:

$$\phi_A = \phi_A^q + \phi_A^X = \gamma \quad (1.96)$$

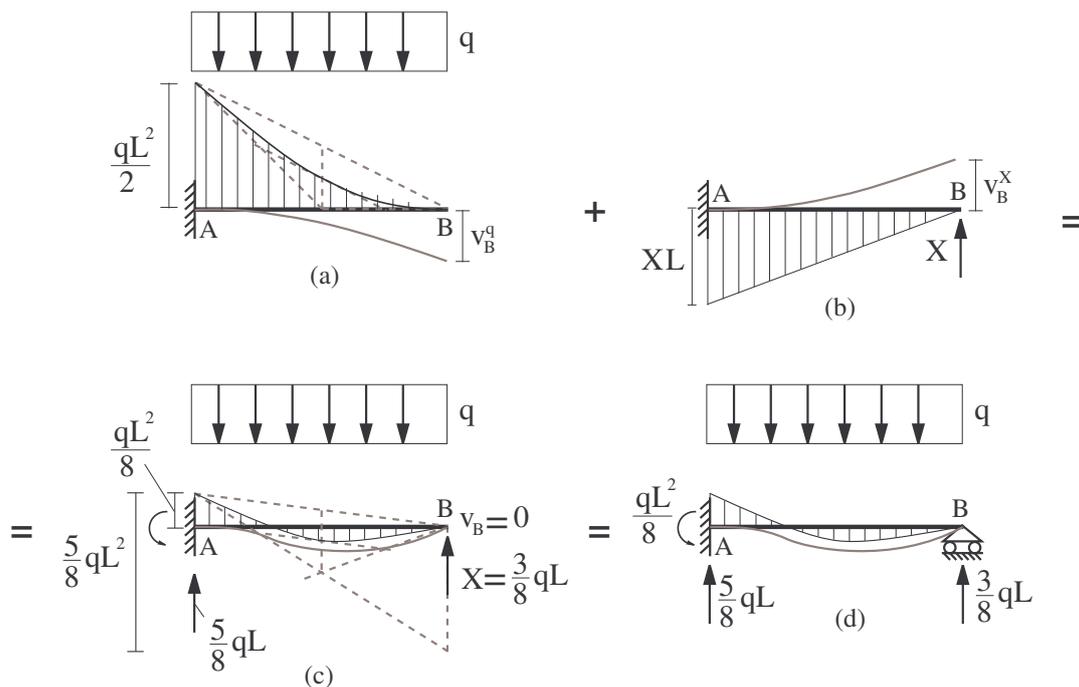


Figura 1.126: Problema 1: soluzione con il metodo delle equazioni di congruenza.

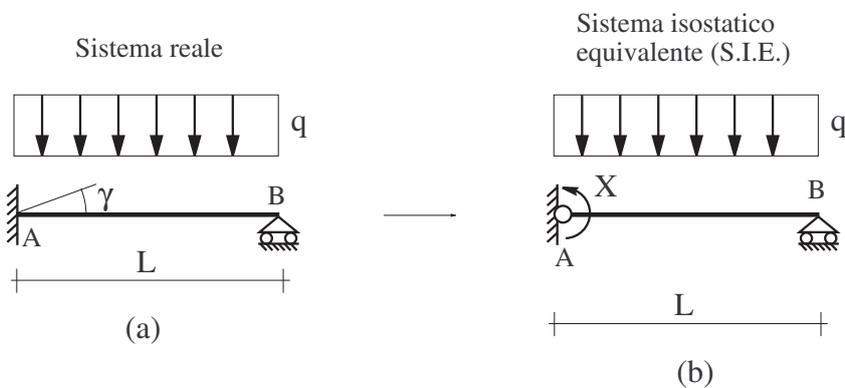


Figura 1.127: Problema 2: presenza di un cedimento anelastico γ dell'incastro e scelta di un S.I.E. diverso da quello del problema 1.

Sostituendo i risultati degli schemi noti si ha:

$$\phi_A^q = -\frac{q L^3}{24 EI} \quad \phi_A^X = \frac{X L}{3 EI} \Rightarrow -\frac{q L^3}{24 EI} + \frac{X L}{3 EI} = \gamma \quad (1.97)$$

da cui si ottiene:

$$X = -\frac{q L^2}{8} + \frac{3 EI}{L} \gamma \quad (1.98)$$

L'unica regola che bisogna tenere ben presente è che nel levare un vincolo semplice bisogna fare in modo da eliminare il grado di iperstaticità, passando da $i = 1$ a $i = 0$ in questo caso, e non aumentare il grado di labilità. I due schemi di figura 1.128 rappresentano esempi di tale tipo di errore.

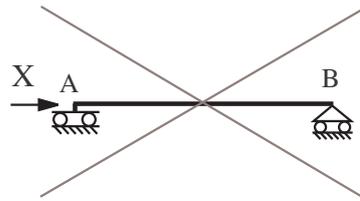
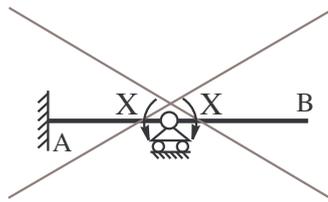
Sistema reale	Scelta sbagliata del vincolo eliminato (struttura labile)
	
	

Figura 1.128: Problema 2: scelta sbagliata del vincolo eliminato.

1.10.3 Problema 3

Nel problema di figura 1.129.a. si potrebbe pensare di eliminare l'appoggio interno e sostituirlo con l'incognita iperstatica, come mostrato in figura 1.129.b. Tale scelta è legittima, in quanto effettivamente lo schema ottenuto è isostatico e la scrittura della corrispondente equazione di congruenza $v_B = 0$ condurrebbe alla soluzione del problema. Tuttavia, per determinare la soluzione in questo modo non si riuscirebbero ad utilizzare gli schemi noti e dunque il S.I.E. così scelto non è conveniente.

Uno S.I.E. conveniente si ottiene eliminando, in luogo di un vincolo esterno, un vincolo interno, ed in particolare sostituendo al vincolo triplo di continuità in B , uno doppio costituito da una cerniera¹⁵.

L'incognita iperstatica che bisogna aggiungere sullo S.I.E. è evidentemente la reazione che il vincolo eliminato nella realtà può trasmettere. Ma essendo questo un vincolo interno, la reazione in realtà è un sistema di due reazioni, ovvero le due reazioni mutue che si scambiano in B le parti a destra ed a sinistra di B . In questo caso tali reazioni sono le due coppie che rappresentano il momento flettente in B . Esse sono due coppie uguali ed opposte il cui valore X è dunque l'incognita iperstatica del problema.

¹⁵Si noti bene che il carrello in B va lasciato in quanto se eliminato si avrebbe ad una struttura labile.

Per capire quale sia l'equazione di congruenza da scrivere basta osservare che, nello schema con la cerniera in B sarebbe possibile avere rotazioni a destra ed a sinistra di B diverse, ovvero potrebbe avvenire $\phi_{Bs} \neq \phi_{Bd}$, mentre nello schema reale ciò non può avvenire. L'equazione di congruenza è dunque:

$$\phi_{Bs} = \phi_{Bd} \quad (1.99)$$

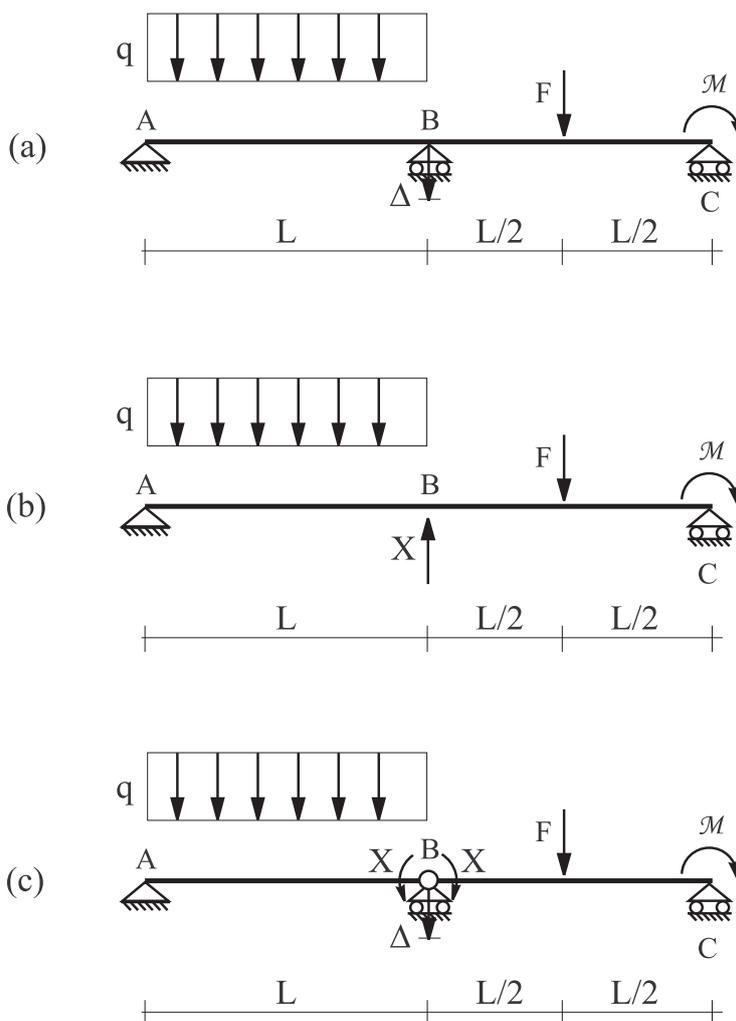


Figura 1.129: Problema 3: (a) schema reale; (b) S.I.E. che non consente di utilizzare i risultati noti; (c) S.I.E. che consente di utilizzare gli schemi noti.

La convenienza del S.I.E. così ottenuto e riportato in figura 1.129.c si evince dal fatto che con tale schema, ed utilizzando come al solito il principio di sovrapposizione degli effetti, è possibile ricondursi alle soluzioni degli schemi noti. Ciò è mostrato nella figura 1.130 per lo schema ottenuto considerando solamente la presenza del carico distribuito.

L'equilibrio del tratto B_dC coinvolge solamente le reazioni R_{Bo}^d , R_{Bv}^d e R_C , che dunque sono nulle (figura 1.130.b). Passando all'equilibrio della cerniera, essendo nulle

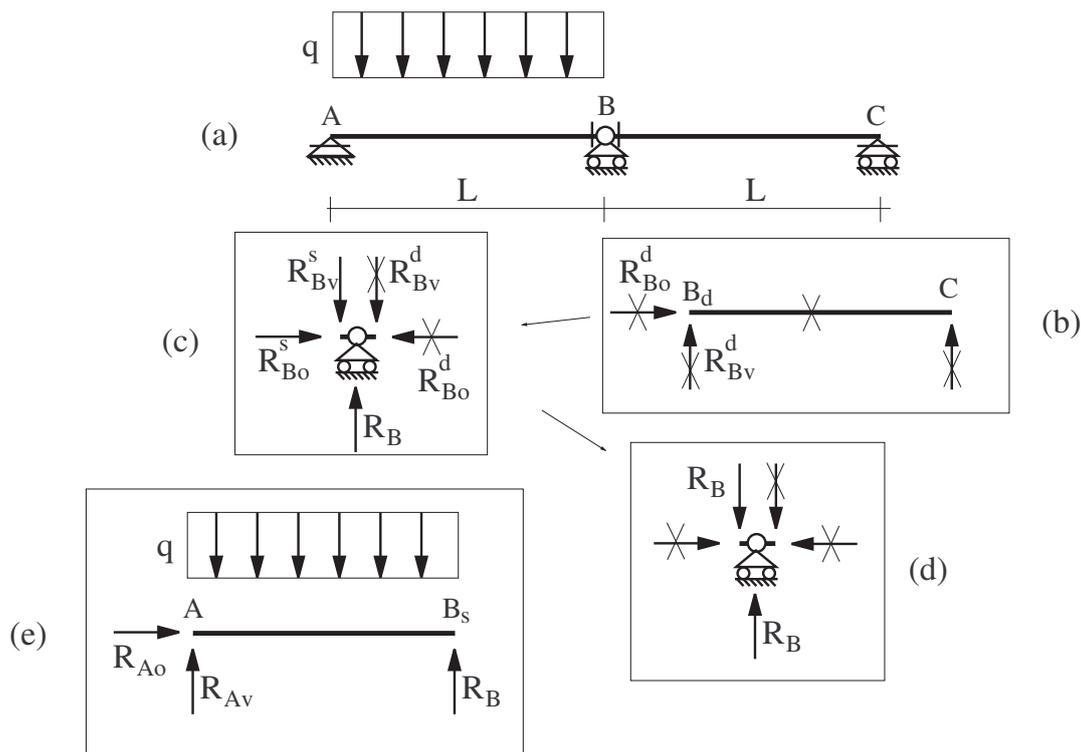


Figura 1.130: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza del solo carico distribuito.

R_{Bo}^d e R_{Bv}^d si riconosce che R_{Bo}^s deve essere nulla mentre la reazione R_{Bv}^d deve essere uguale ed opposta a quella del carrello (figura 1.130.c-d). Passando quindi all'equilibrio del tratto AB_s si vede che lo schema statico ottenuto è proprio quello di una trave appoggiata di lunghezza L soggetta ad un carico distribuito, e che la reazione di destra, che è verticale, è proprio quella del carrello in B .

Si conclude che, nello schema di figura 1.130.a in realtà si può ignorare la presenza della campata a destra di B e studiare dunque la trave AB come una semplice trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito, ovvero uno schema noto. La deformata della trave AB è dunque la stessa dello schema noto, mentre quella della trave BC è identicamente nulla (figura 1.131). Il valore della rotazione a sinistra di B per effetto del carico distribuito è dato dal risultato noto, mentre la rotazione a destra è nulla:

$$\phi_{Bs}^q = \frac{qL^3}{24EI} \quad \phi_{Bd}^q = 0 \quad (1.100)$$

Analogamente si ragiona sugli schemi delle figure 1.132-1.135.

Per lo schema con il cedimento, invece, si ottiene un sistema di spostamenti rigidi infinitesimi su ciascuna trave (figura 1.136) in quanto le caratteristiche della sollecitazione sono identicamente nulle.

Osservazione: Su una struttura isostatica, la presenza di cedimenti e/o distorsioni non induce mai caratteristiche della sollecitazione. Questo perché in presenza solamente

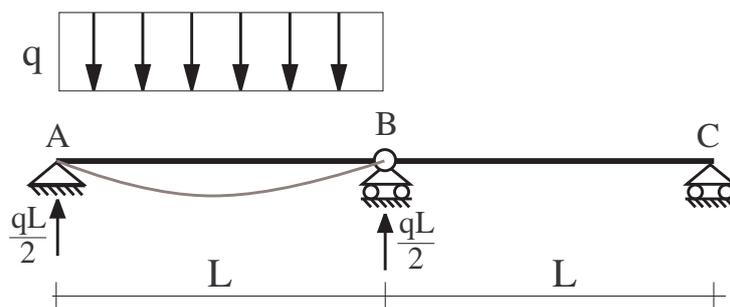


Figura 1.131: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza del solo carico distribuito.

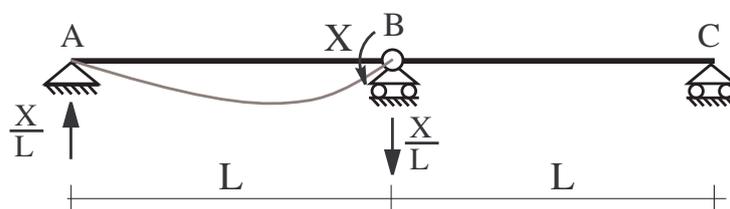


Figura 1.132: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza della coppia X a sinistra di B .

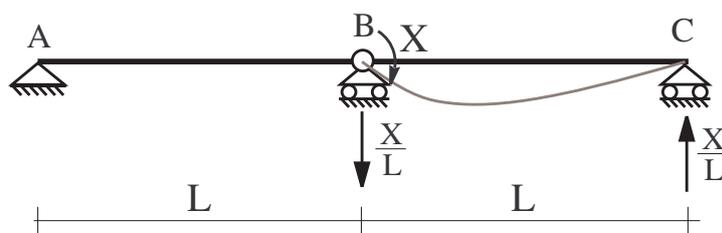


Figura 1.133: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza della coppia X a destra di B .

di tali tipi di azione il sistema di forze esterne attive è nullo, e dunque un sistema di reazioni tutte nulle assicura l'equilibrio del sistema. Ma poiché per una struttura isostatica la soluzione del problema dell'equilibrio è unica, allora, questa soluzione con tutte reazioni nulle è proprio la soluzione del problema dell'equilibrio. Ma è evidente se tutte le forze attive e tutte le reazioni sono nulle allora anche le caratteristiche della sollecitazione devono necessariamente essere identicamente nulle. ■

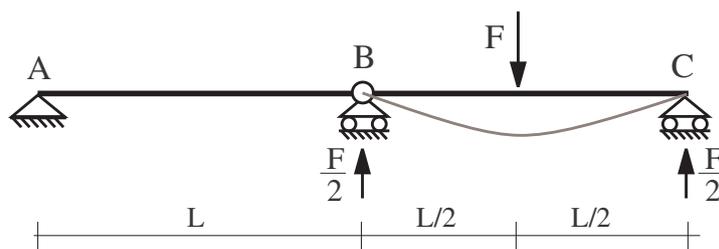


Figura 1.134: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza della forza in mezzera sul tratto di destra.

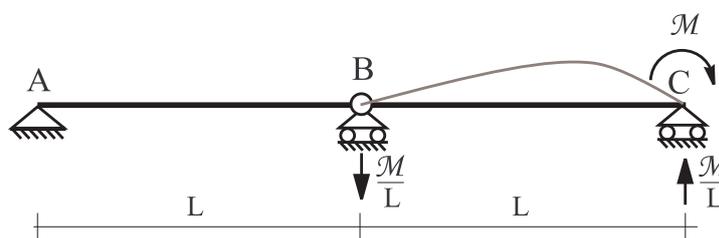


Figura 1.135: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza della coppia in C.

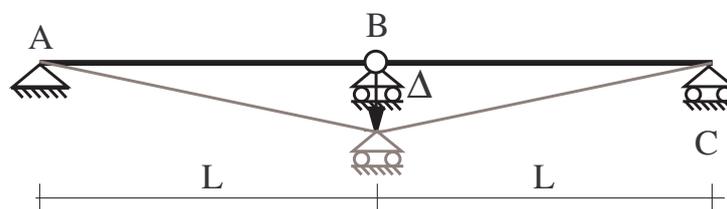


Figura 1.136: Problema 3: spostamento rigido per effetto del cedimento Δ.

Pertanto, utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ha:

$$\phi_{Bs} = \phi_{Bs}^q + \phi_{Bs}^X + \phi_{Bs}^\Delta = \frac{q L^3}{24 EI} + \frac{X L}{3 EI} - \frac{\Delta}{L} \tag{1.101}$$

$$\phi_{Bd} = \phi_{Bd}^X + \phi_{Bd}^F + \phi_{Bd}^M + \phi_{Bd}^\Delta = -\frac{X L}{3 EI} - \frac{F L^2}{16 EI} + \frac{M L}{6 EI} + \frac{\Delta}{L}$$

e l'equazione di congruenza (1.99) si esplicita come segue:

$$\frac{q L^3}{24 EI} + \frac{X L}{3 EI} - \frac{\Delta}{L} = -\frac{X L}{3 EI} - \frac{F L^2}{16 EI} + \frac{M L}{6 EI} + \frac{\Delta}{L} \tag{1.102}$$

da cui il valore della reazione iperstatica X :

$$X = -\frac{qL^2}{16} - \frac{3}{32}FL + \frac{\mathfrak{M}}{4} + \frac{3EI}{L}\Delta \quad (1.103)$$

Del risultato ottenuto si vede che, in presenza solo del carico e/o della forza verticale, il verso effettivo delle coppie X nello S.I.E. sarebbe opposto a quello ipotizzato. Ciò significa che per effetto solamente di tali azioni le fibre tese in B sarebbero quelle superiori, e quindi il momento flettente sarebbe negativo.

Viceversa, in presenza solo della coppia \mathfrak{M} in C e/o del cedimento Δ , il verso ipotizzato delle coppie X coinciderebbe con quello effettivo e dunque il corrispondente momento flettente in B sarebbe positivo.

In presenza di tutte le azioni il segno della X e dunque del momento flettente dipende dal loro valore.

1.10.4 Problema 4

La trave in figura 1.137.a è tre volte iperstatica. Pertanto sarà necessario eliminare tre vincoli semplici e scrivere un sistema di tre equazioni di congruenza per risolvere la struttura. Si mostrerà però che tale sistema si disaccoppia in due sistemi, uno costituito da una sola equazione e legato al solo comportamento flessionale, ed un secondo di due equazioni e legato al solo comportamento estensionale.

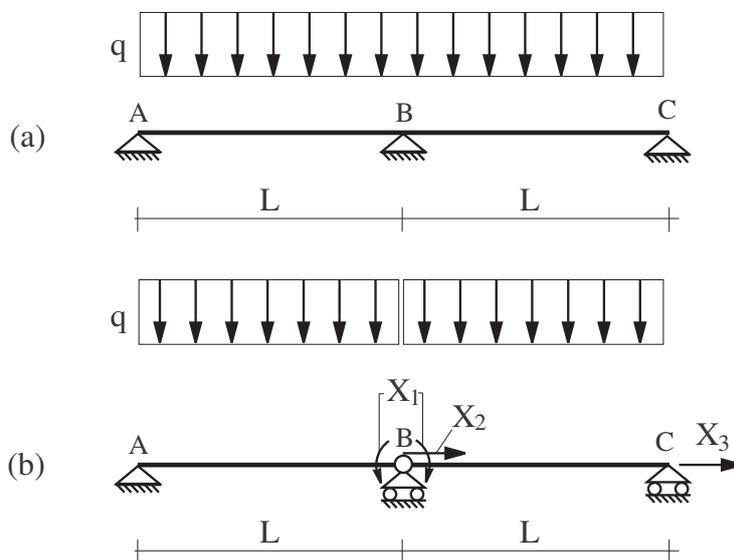


Figura 1.137: Problema 4: (a) sistema reale; (b) S.I.E.

Un S.I.E. equivalente che consente di utilizzare gli schemi noti è quello mostrato in figura 1.137.b. Le equazioni di congruenza sono:

$$\phi_{Bs} = \phi_{Bd} \quad w_B = 0 \quad w_C = 0 \quad (1.104)$$

Operando come al solito per sovrapposizione degli effetti si considerano dapprima gli schemi in cui si applicano solamente la X_2 o la X_3 , mostrati nelle figure 1.138 e 1.139. Si vede facilmente che si ottiene:

$$\begin{cases} w_B^{X_2} = w_C^{X_2} = \frac{X_2 L}{EA} \\ w_B^{X_3} = \frac{X_3 L}{EA} & w_C^{X_3} = \frac{X_3 2L}{EA} \end{cases} \quad (1.105)$$

I risultati possono ottenersi direttamente per integrazione dell'equazione differenziale, o anche sfruttando con opportuni ragionamenti lo schema noto di figura 1.123. Nel primo schema di figura 1.138 solamente la trave AB è soggetta allo sforzo normale costante pari a X_2 mentre la trave BC segue rigidamente per cui $w_B^{X_2} = w_C^{X_2}$. Nel secondo schema di figura 1.139 lo sforzo normale costante X_3 interessa tutta la trave AC , che è lunga $2L$.

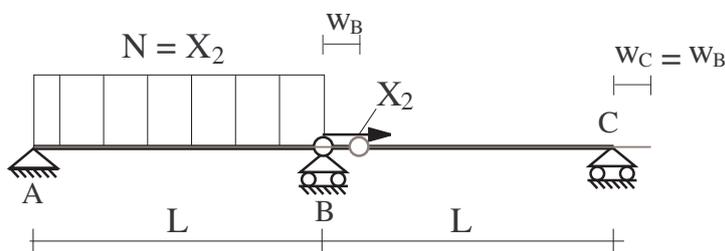


Figura 1.138: Problema 4: schema con la X_2 .

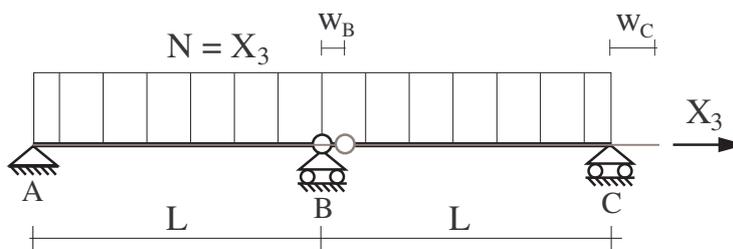


Figura 1.139: Problema 4: schema con la X_3 .

Negli schemi delle figure 1.138 e 1.139 si ha solo sforzo normale. Il momento flettente è identicamente nullo e non si ha dunque deformazione flessionale. Le rotazioni a destra e sinistra di B sono dunque nulle in tali schemi. Si vede facilmente che esse dipendono solamente dal carico q e dall'incognita iperstatica X_1 , e che invece per effetto di queste due azioni lo sforzo normale è identicamente nullo e gli spostamenti w_B e w_C sono entrambi nulli. Si ha in particolare:

$$\phi_{Bs}^{X_2} = \phi_{Bs}^{X_3} = \phi_{Bd}^{X_2} = \phi_{Bd}^{X_3} = 0 \quad w_B^{X_1} = w_C^{X_1} = w_B^q = w_C^q = 0 \quad (1.106)$$

$$\phi_{Bs}^{X_1} = \frac{X_1 L}{3 EI} \quad \phi_{Bd}^{X_1} = -\frac{X_1 L}{3 EI} \quad \phi_{Bs}^q = \frac{q L^3}{24 EI} \quad \phi_{Bd}^q = -\frac{q L^3}{24 EI} \quad (1.107)$$

Sostituendo i risultati ottenuti nelle equazioni di congruenza (1.104) si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \frac{X_1 L}{EI} = -\frac{q L^3}{12 EI} \\ \frac{X_2 L}{EA} + \frac{X_3 L}{EA} = 0 \\ \frac{X_2 L}{EA} + \frac{X_3 2L}{EA} = 0 \end{array} \right. \quad (1.108)$$

che in forma matriciale si riscrive:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{L}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{EA} & \frac{L}{EA} \\ 0 & \frac{L}{EA} & \frac{2L}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q L^3}{12 EI} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.109)$$

Chiaramente la prima equazione è disaccoppiata dal sistema della seconda e della terza. E' immediato vedere che la soluzione di queste ultime due è quella banale $X_2 = X_3 = 0$, mentre la prima fornisce:

$$X_1 = -\frac{q L^2}{8} \quad (1.110)$$

Si capisce dunque il motivo per cui lo schema di figura 1.137.a viene spesso direttamente visto come un sistema solamente 1 volta iperstatico. Le altre due iperstaticità infatti sono banali da risolvere. Esse infatti riguardano il comportamento estensionale della trave e non essendoci forze orizzontali né distorsioni uniformi non conducono a sollecitazioni aggiuntive. Inoltre, se anche tali azioni orizzontali fossero presenti, esse si studierebbero risolvendo un problema disaccoppiato rispetto a quello flessionale. In altre parole, quando si dice che il problema 4 è una volta iperstatico si suole sottintendere che il problema flessionale è una volta iperstatico.

E' importante sottolineare che, anche se il S.I.E. scelto per risolvere il problema 4 non è l'unico possibile, qualsiasi altro avrebbe comportato la presenza di una incognita iperstatica legata al solo problema flessionale, e due incognite iperstatiche legate solamente al problema estensionale. La verifica di quest'ultima affermazione la si lascia come utile esercizio.

1.10.5 Problema 5

Alcuni risultati ottenuti per le strutture iperstatiche studiate nei problemi 1-4 sembrerebbero contraddire, in apparenza, il fatto che su una struttura iperstatica è necessario

tenere conto della deformabilità della struttura per calcolare le reazioni vincolari e determinare le caratteristiche della sollecitazione sulla struttura. Eppure, il valore delle reazioni iperstatiche ottenuto per effetto di un carico q , di una forza F o di un momento \mathcal{M} , sembrerebbero a prima vista indipendenti dalle caratteristiche di deformabilità, o equivalentemente di rigidità, in quanto ciascuno dei valori trovati finora non dipende da EI .

Viceversa, la rigidità EI , o quella EA nel successivo problema 6, influiscono sui valori delle reazioni iperstatiche in presenza di cedimenti e distorsioni.

Nel problema 5 si vuole mostrare che in una struttura iperstatica, in presenza di carichi, forze e coppie, la deformabilità della struttura influisce sul valore delle reazioni e delle caratteristiche della sollecitazione non tanto attraverso il suo valore assoluto, ma attraverso la sua distribuzione e la sua eventuale variazione sulla struttura, restando inteso però che il valore assoluto della deformabilità deve essere sufficientemente piccolo affinché sia valida l'ipotesi di piccoli spostamenti.

In altre parole negli schemi studiati in precedenza la deformabilità finisce per non influire sulle sollecitazioni indotte da carichi, forze e coppie, solamente perché essa è costante su tutta la struttura. Anche in tali casi, tuttavia, essa ovviamente influisce sull'entità delle deformazioni.

Nel problema 5 si vuole capire meglio tale aspetto del problema studiando lo schema 1 volta iperstatico di figura 1.140, in cui si assume che le rigidità flessionali dei tratti AB e BC siano diverse e pari rispettivamente a $(EI)_1$ ed $(EI)_2$.

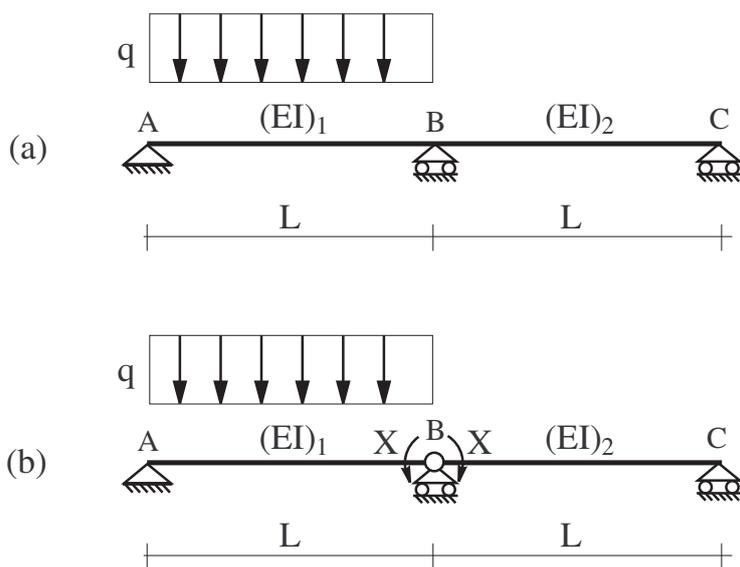


Figura 1.140: Problema 5: (a) sistema reale; (b) S.I.E.

Introducendo il S.I.E. 1.140.b e si ottiene l'equazione di congruenza:

$$\frac{q L^3}{24 (EI)_1} + \frac{X L}{3 (EI)_1} = -\frac{X L}{3 (EI)_2} \quad (1.111)$$

che risolta fornisce:

$$X = -\frac{q L^2}{8} \left(\frac{\frac{1}{(EI)_1}}{\frac{1}{(EI)_1} + \frac{1}{(EI)_2}} \right) \quad (1.112)$$

Introducendo il seguente parametro β :

$$\beta = \frac{(EI)_1}{(EI)_2} \quad (1.113)$$

la (1.112) si riscrive:

$$X = -\frac{q L^2}{8(1 + \beta)} \quad (1.114)$$

Quando β tende a zero, la rigidezza $(EI)_2$ tende ad essere molto più grande di quella $(EI)_1$, e la presenza del tratto BC determina per quello AB un vincolo che tende ad essere un incastro (figura 1.141). Infatti in tal caso il momento flettente in B tende al valore di $q L^2/8$ ottenuto all'incastro per la trave appoggiata in un estremo ed incastrata nell'altro soggetta ad un carico distribuito (problema 1).

Quando β tende all'infinito, la rigidezza $(EI)_2$ tende ad essere trascurabile rispetto a quella $(EI)_1$ per cui il tratto AB tende a non accorgersi della presenza del tratto adiacente BC (figura 1.142). Di conseguenza in tal caso il momento flettente in B tende al valore nullo che si avrebbe se il tratto BC non ci fosse ed il tratto AB fosse dunque una semplice trave appoggiata.

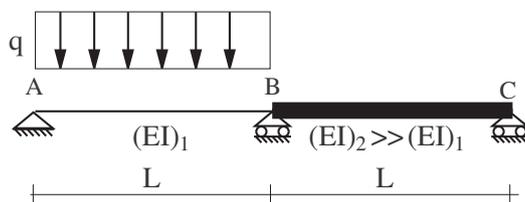


Figura 1.141: Problema 5: caso $(EI)_2 \gg (EI)_1$.

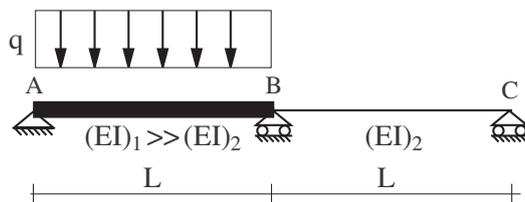


Figura 1.142: Problema 5: caso $(EI)_1 \gg (EI)_2$.

1.10.6 Problema 6

Il problema 6 è di semplice soluzione. L'equazione di congruenza in B si scrive:

$$\frac{X L}{EA} + \alpha \Delta t L = 0 \quad (1.115)$$

e fornisce:

$$X = -EA \alpha \Delta t \quad (1.116)$$

Si nota in particolare che lo sforzo normale nella trave, pari a X , non dipende dalla lunghezza L .

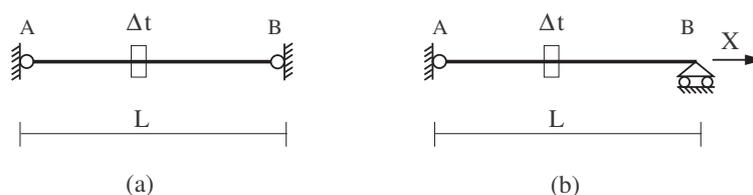


Figura 1.143: Problema 6.

1.10.7 Problema 7: composizione cinematica delle rotazioni e degli spostamenti

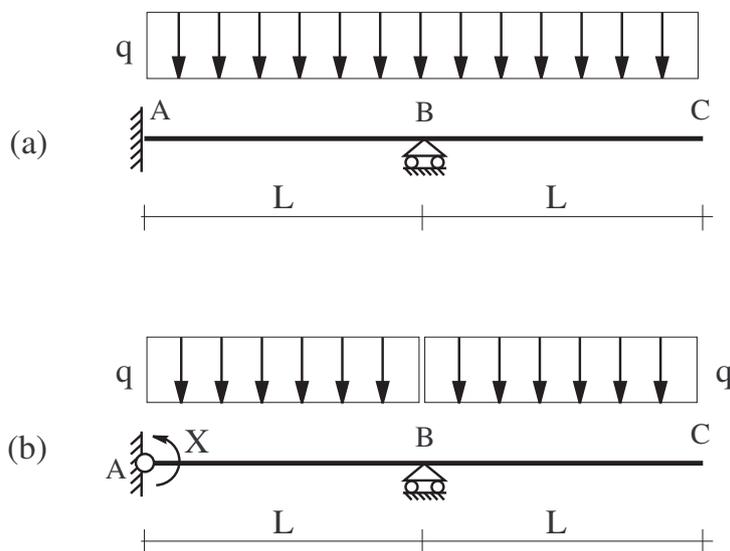


Figura 1.144: Problema 7: (a) schema reale; (b) S.I.E.

Il problema 7 mostrato in figura 1.144.a non può risolversi sovrapponendo semplicemente i risultati degli schemi noti ed è dunque necessario fare delle considerazioni

ulteriori. Conviene utilizzare il S.I.E. di figura 1.144.b e decomporre il carico nelle sue due parti agenti sui tratti AB e BC , che verranno indicate con q_s e q_d .

Così facendo, in presenza solo della coppia X , o solo del carico q_s , il tratto BC risulta scarico e, nella deformazione dell'intera trave, è caratterizzato da uno spostamento rigido infinitesimo che 'segue' la rotazione in B del tratto AB . Quest'ultimo è caratterizzato da reazioni vincolari, diagrammi delle caratteristiche e configurazione deformata in tutto uguali a quelli che si avrebbero in assenza del tratto BC . Pertanto in questo caso si possono semplicemente utilizzare i risultati degli schemi noti di trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito o ad una coppia all'estremità. Si ottiene così (figure 1.145 e 1.146):

$$\phi_A^{q_s} = -\frac{q L^3}{24 EI} \quad \phi_A^X = \frac{X L}{3 EI} \quad (1.117)$$

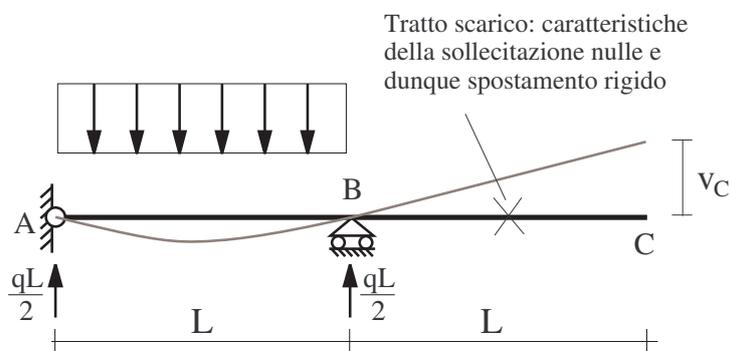


Figura 1.145: Problema 7: uso dello schema noto di trave appoggiata con carico distribuito.

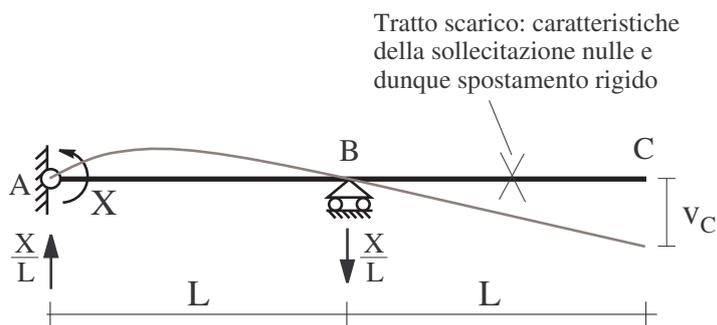


Figura 1.146: Problema 7: uso dello schema noto di trave appoggiata con coppia di estremità.

Un metodo efficace per valutare la rotazione in A dovuta al carico a destra q_d (schema di figura 1.147) consiste nel ricavare la deformata della trave componendo più schemi.

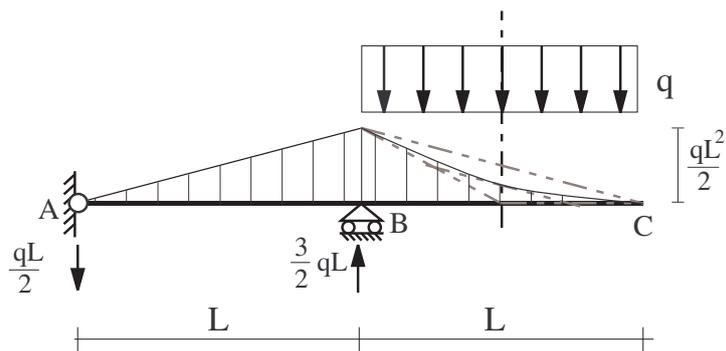


Figura 1.147: Problema 7: reazioni e diagramma del momento per il carico sullo sbalzo.

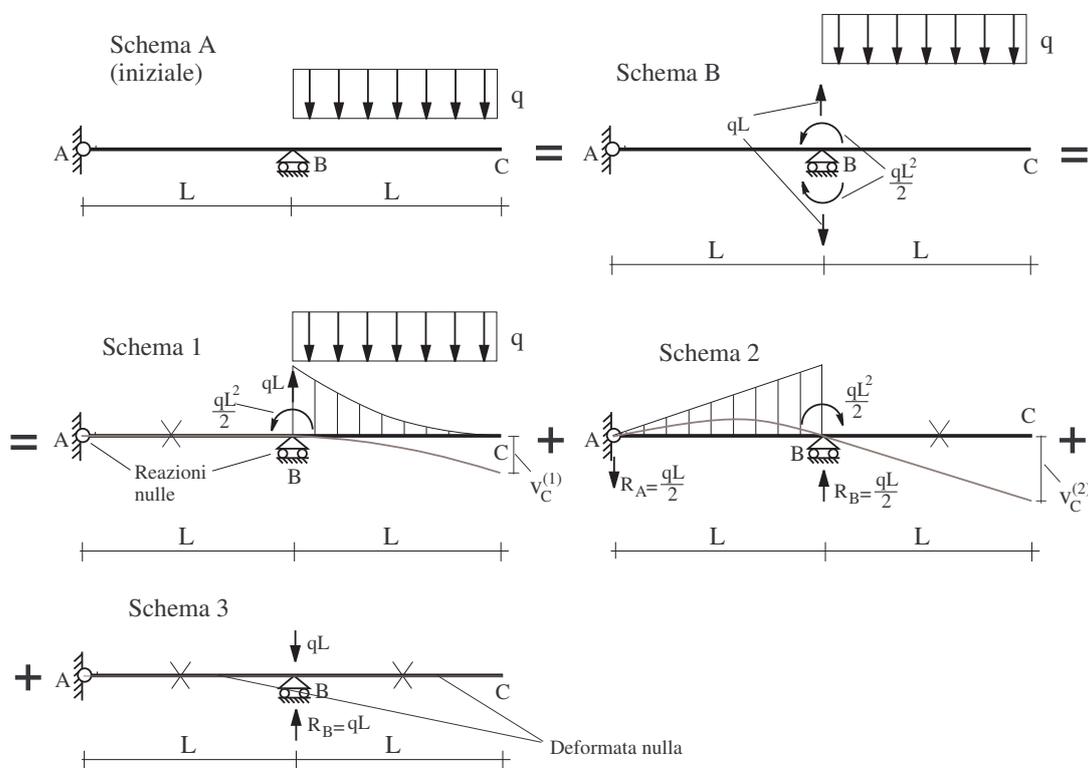


Figura 1.148: Problema 7: composizione cinematica delle rotazioni e degli spostamenti.

Tale metodo è anche noto come ‘metodo della composizione cinematica delle rotazioni e degli spostamenti’.

Un primo modo per illustrare tale metodo parte dall’osservazione che lo schema in esame, ovvero lo ‘Schema A’ di figura 1.148, è del tutto equivalente allo ‘Schema B’ della stessa figura, ottenuto aggiungendo in B due forze uguali ed opposte pari a qL e due coppie uguali ed opposte pari a $qL^2/2$. Infatti così facendo si sono aggiunte

globalmente in B una forza verticale ed una coppia entrambe nulle.

Tuttavia è ora possibile riguardare lo schema B come sovrapposizione dei tre schemi 1, 2 e 3 di figura 1.148.

Risolvendo lo schema 1 si trova che tutte le reazioni vincolari esterne sono nulle e che il tratto AB è dunque scarico. Pertanto, date le condizioni al contorno di spostamento verticale nullo sia in A che in B , nello schema 1 la deformata del tratto AB è identicamente nulla mentre quella del tratto BC è uguale a quella di una mensola soggetta ad un carico distribuito, che è uno schema noto. In tale schema è dunque pari a zero la rotazione in A

$$\phi_A^{(1)} = 0, \quad (1.118)$$

che interessa in particolare per la scrittura dell'equazione di congruenza. Volendo conoscere lo spostamento verticale e la rotazione in C , essi si ricavano dallo schema noto della mensola e valgono:

$$v_C^{(1)} = \frac{q L^4}{8 EI} \quad \phi_C^{(1)} = -\frac{q L^3}{6 EI} \quad (1.119)$$

L'apice (1) indica che tali valori sono quelli ottenuti sullo schema 1.

Nello schema 2 il tratto BC risulta scarico e nella deformazione dell'intera trave, analogamente a quanto visto per gli schemi nelle figure 1.145 e 1.146, esso è caratterizzato da uno spostamento rigido infinitesimo che 'segue' la rotazione in B del tratto AB . Quest'ultimo è caratterizzata da reazioni vincolari, diagrammi delle caratteristiche e configurazione deformata in tutto uguali a quelli che si avrebbero in assenza del tratto BC . Pertanto in questo caso si possono semplicemente utilizzare i risultati dello schema noto di trave appoggiata soggetta ad una coppia all'estremità pari a $q L^2/2$. Si ottiene per la rotazione in A , essendo A l'estremo opposto a quello in cui agisce la coppia $q L^2/2$:

$$\phi_A^{(2)} = \frac{\left(\frac{q L^2}{2}\right) L}{6 EI} = \frac{q L^3}{12 EI} \quad (1.120)$$

Volendo conoscere lo spostamento verticale e la rotazione in C essi si determinano considerando che, nota la rotazione di B , che è data da:

$$\phi_B^{(2)} = -\frac{\left(\frac{q L^2}{2}\right) L}{3 EI} = -\frac{q L^3}{6 EI} \quad (1.121)$$

la rotazione rigida del tratto BC che, come detto, segue la rotazione in B , fornisce:

$$\phi_C^{(2)} = \phi_B^{(2)} = -\frac{q L^3}{6 EI} \quad v_C^{(2)} = -\phi_C^{(2)} L = \frac{q L^4}{6 EI} \quad (1.122)$$

Nello schema 3 è immediato vedere che tutta la forza $q L$ viene assorbita dal vincolo, che reagisce dunque con una reazione uguale e contraria verso l'alto, mentre la reazione in A è nulla. L'intera trave AC è dunque scarica e, in virtù delle condizioni al contorno, la deformata è identicamente nulla.

Pertanto, la rotazione in A per effetto del carico a destra è data da:

$$\phi_A = \phi_A^{(1)} + \phi_A^{(2)} = 0 + \frac{q L^3}{12 EI} = \frac{q L^3}{12 EI} \quad (1.123)$$

Questo valore è quello che serve per la scrittura dell'equazione di congruenza in A .

Lo spostamento verticale e la rotazione in C sono dati da:

$$v_C = v_C^{(1)} + v_C^{(2)} = \frac{q L^4}{8 EI} + \frac{q L^4}{6 EI} = \frac{7 q L^4}{24 EI}$$

$$\phi_C = \phi_C^{(1)} + \phi_C^{(2)} = -\frac{q L^3}{6 EI} - \frac{q L^3}{6 EI} = -\frac{q L^3}{3 EI}$$
(1.124)

Un secondo modo per illustrare il metodo della composizione cinematica delle rotazioni e degli spostamenti è basato sull'idea di suddividere la struttura in più tratti e di decomporre il processo che conduce la struttura nella sua configurazione deformata nella successione di più processi di deformazione. In ognuno di questi le deformazioni della struttura si assumono nulle ovunque tranne che per un tratto, immaginando quindi di avere solo quel tratto deformabile e tutto il resto della struttura invece rigido.

Nel caso in esame tale metodo conduce ad immaginare dapprima il tratto AB infinitamente rigido ($EI = +\infty$), ed il tratto BC caratterizzato dalla sua effettiva rigidità (figura 1.149.a), e successivamente il tratto AB deformabile ed il tratto BC infinitamente rigido (figura 1.149.b).

Nello schema di figura 1.149.a il diagramma del momento induce una curvatura solamente nel tratto BC , mentre quello AB , per le condizioni al contorno, ha spostamenti identicamente nulli.

Gli spostamenti del tratto BC sono quelli di una mensola perché l'ipotesi di infinita rigidità flessionale del tratto AB fornisce per il tratto BC una condizione di vincolo pari all'incastro.

Nello schema di figura 1.149.b, invece, il diagramma del momento induce una curvatura solamente nel tratto AB , mentre quello BC è caratterizzato da uno spostamento rigido infinitesimo, determinato dalla rotazione in B . In particolare, sul tratto AB le caratteristiche e la deformata sono quelli dovuti dalla coppia oraria $q L^2/2$ trasmessa in B .

1.10.8 Problema 8

Nel problema di figura 1.150 la coppia \mathfrak{M} esterna è applicata in B .

Scegliendo come al solito di inserire una cerniera in B , nasce il problema di dove applicare la coppia \mathfrak{M} . Infatti, sul sistema reale, non è necessario specificare se la coppia agisce a destra o a sinistra, perché in B vi è continuità nella rotazione. Pertanto nel problema reale è corretto dire semplicemente che la coppia agisce in B .

Nel S.I.E., però, essendo presente una cerniera sembrerebbe diverso mettere la coppia a destra o a sinistra. In effetti, dalle due scelte scaturiscono valori diversi della X . Ma il paradosso si spiega immediatamente vedendo che, con tali valori diversi della X , la soluzione finale rimane inalterata.

Si consideri prima il caso in cui la coppia viene applicata a sinistra (figura 1.151.a). Sommando algebricamente la coppia \mathfrak{M} e la X a sinistra di B si ottiene lo schema di figura 1.151.b. Scrivendo l'equazione di congruenza $\phi_{Bs} = \phi_{Bd}$ si vede facilmente che si ottiene

$$X = -\mathfrak{M}/2$$
(1.125)

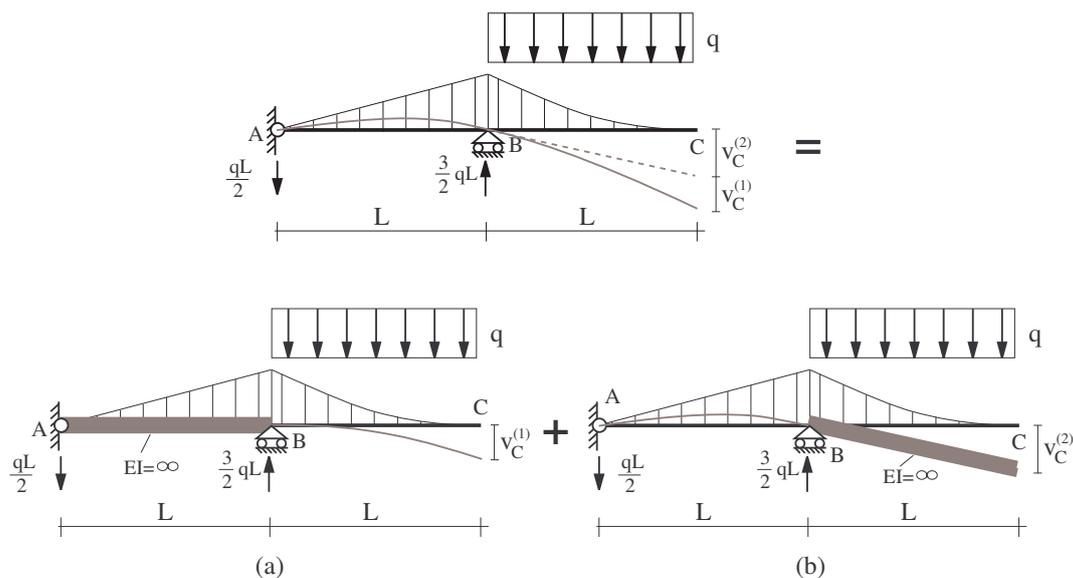


Figura 1.149: Problema 7: interpretazione fisica della composizione cinematica delle rotazioni e degli spostamenti.

da cui si determina il diagramma del momento riportato in figura 1.152 sullo schema reale, dove si riscontra il salto pari a \mathfrak{M} in B come era da aspettarsi.

Ma la scelta di applicare la coppia \mathfrak{M} a sinistra della cerniera in B non è l'unica possibile. Infatti si può scegliere di mettere la coppia \mathfrak{M} a destra della cerniera in B (figura 1.153) o per metà a destra e per metà a sinistra (figura 1.154). O si può più in generale pensare di applicare una coppia a destra ed una a sinistra in modo tale che la loro somma dia \mathfrak{M} .

Il valore dell'incognita iperstatica dipende dalla scelta fatta, e si lascia come esercizio la verifica che nel caso del S.I.E. di figura 1.153 si ottiene $X = \mathfrak{M}/2$ mentre per quello di figura 1.154 si ricava $X = 0$. In ogni caso però il diagramma del momento finale e quindi la deformata e tutta la soluzione non cambiano e sono quelli riportati nella figura 1.152.

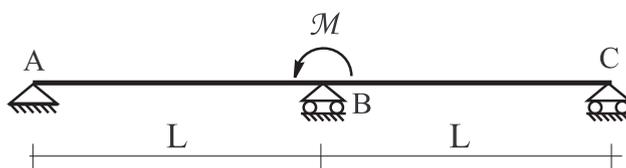


Figura 1.150: Problema 8.

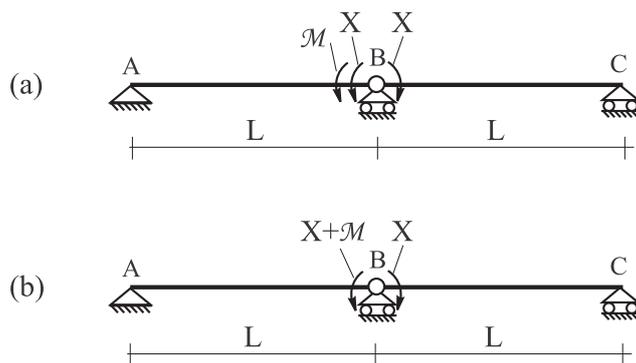


Figura 1.151: Problema 8: (a) S.I.E. in cui si è scelto di fare agire la coppia \mathcal{M} a sinistra della cerniera; (b) come (a) ma avendo sommato algebricamente \mathcal{M} e X a sinistra.

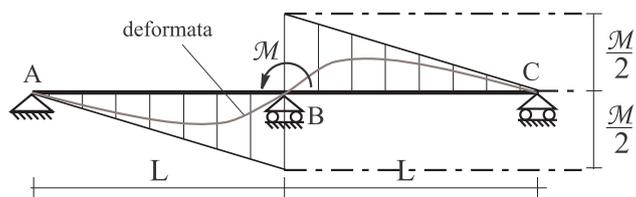


Figura 1.152: Problema 8: diagramma del momento ottenuto e riportato sullo schema reale.

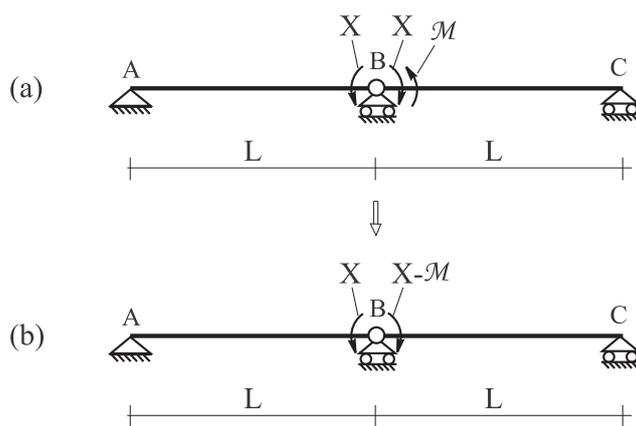


Figura 1.153: Problema 8: (a) S.I.E. in cui si è scelto di fare agire la coppia \mathcal{M} a destra della cerniera; (b) come (a) ma avendo sommato algebricamente la \mathcal{M} e X a destra.

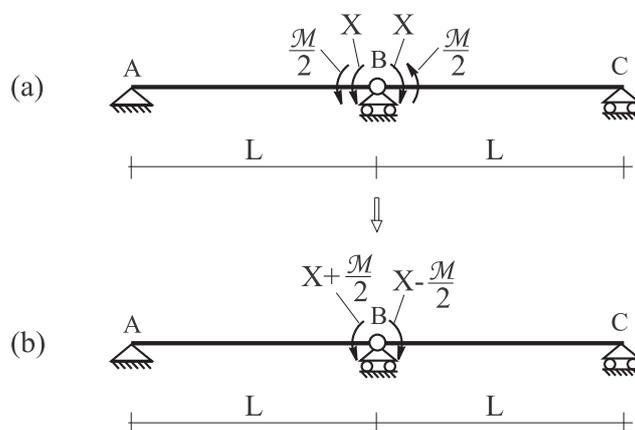
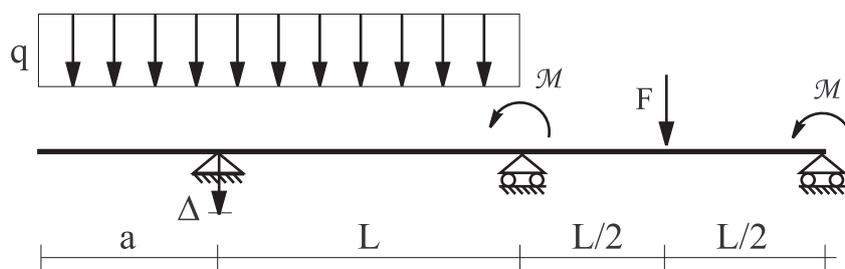


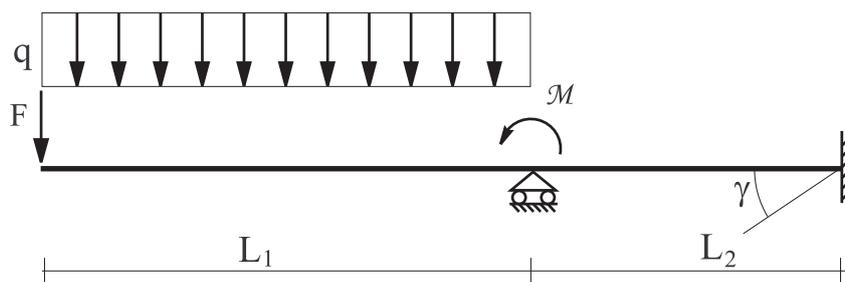
Figura 1.154: Problema 8: (a) S.I.E. in cui si è scelto di fare agire la coppia \mathcal{M} per metà a destra e per metà a sinistra della cerniera; (b) come (a) ma avendo sommato algebricamente le coppie $\mathcal{M}/2$ e X .

1.11 Esercizi proposti

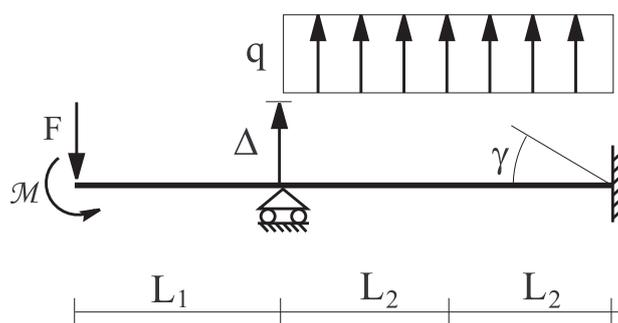
Gli esercizi 1-10 riguardano travi ad asse rettilineo una volta iperstatiche. In essi si richiede di scegliere nel modo più opportuno un sistema isostatico equivalente e di determinare il valore dell'incognita iperstatica.



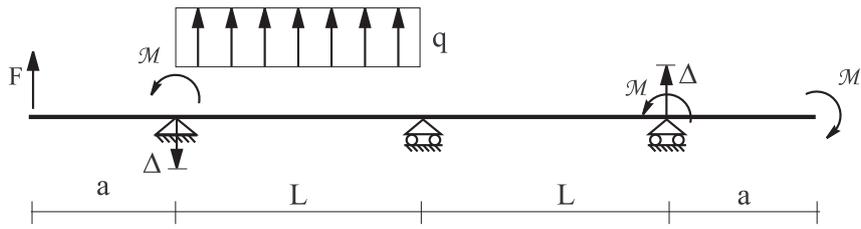
Esercizio 1.



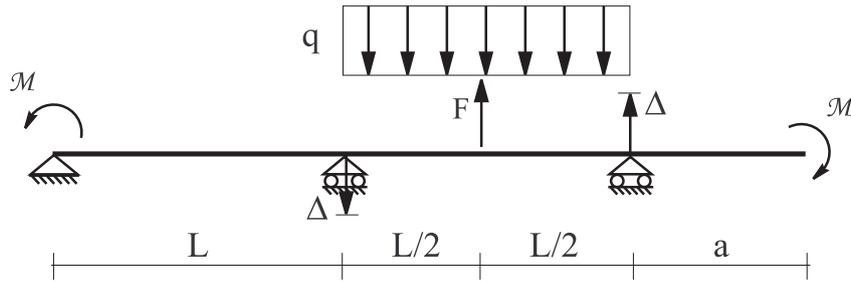
Esercizio 2.



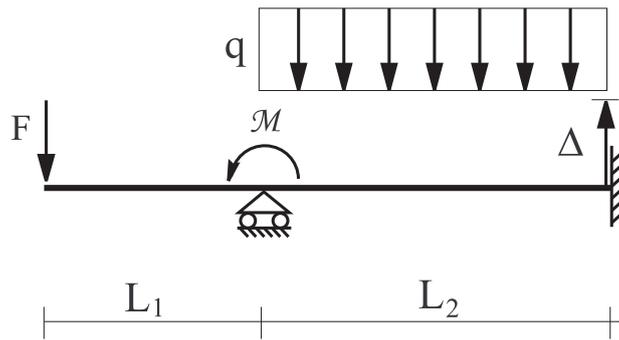
Esercizio 3.



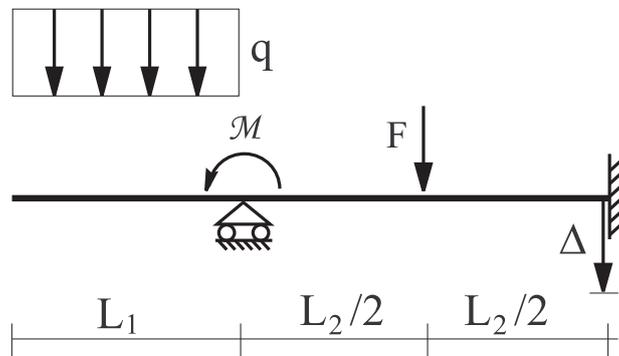
Esercizio 4.



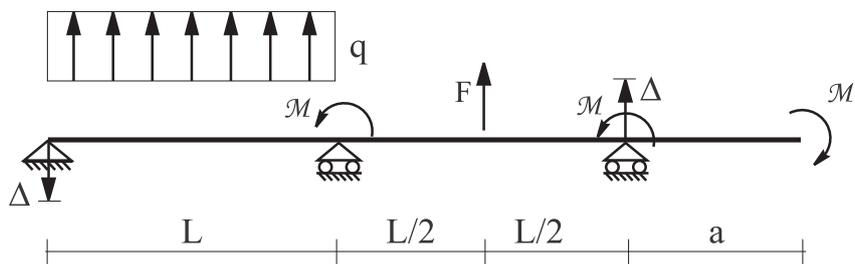
Esercizio 5.



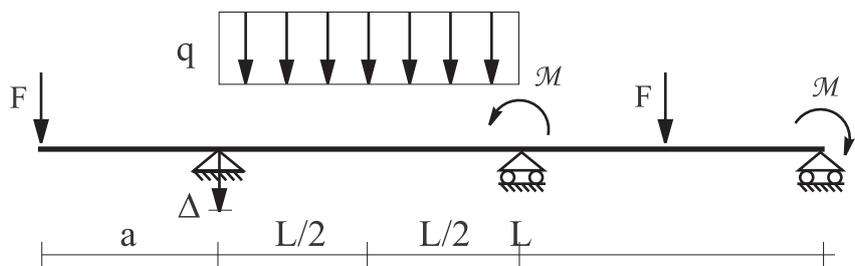
Esercizio 6.



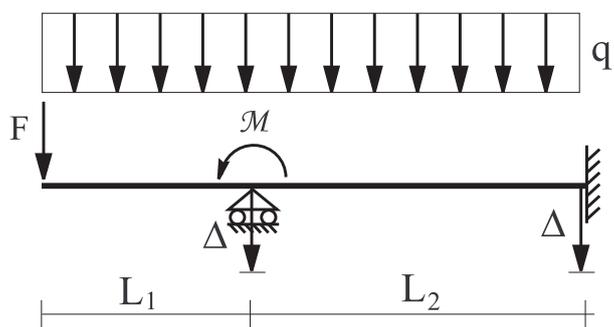
Esercizio 7.



Esercizio 8.



Esercizio 9.



Esercizio 10.

Capitolo 2

ELEMENTI DI MECCANICA DEL CONTINUO

2.1 Richiami di algebra ed analisi vettoriale

2.1.1 Spazi vettoriali e funzioni lineari

Un insieme \mathcal{U} è detto uno ‘spazio vettoriale’ sul campo reale ed i suoi elementi sono detti vettori quando sono definite le operazioni di somma tra due vettori di \mathcal{U} e di moltiplicazione di un vettore di \mathcal{U} per uno scalare, ed il risultato di tali operazioni è sempre un vettore di \mathcal{U} , cioè si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U} &\Rightarrow \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U} && \text{(somma tra vettori)} \\ \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \quad \alpha \in \mathfrak{R} &\Rightarrow \alpha \mathbf{u} \in \mathcal{U} && \text{(moltiplicazione di un vettore} \\ &&& \text{per uno scalare)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

e quando la somma tra vettori gode delle seguenti proprietà valide per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \text{associatività} \quad & \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ \text{commutatività} \quad & \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \exists \text{ l'elemento } \mathbf{0} \\ \text{(vettore nullo) tale che:} \quad & \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} \end{aligned}$$

mentre la moltiplicazione di un vettore per uno scalare gode delle seguenti altre proprietà, valide per ogni $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{R}$ ed $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \text{distributività} \quad & (\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{u} \\ & \alpha (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \alpha \mathbf{u}_1 + \alpha \mathbf{u}_2 \\ \text{associatività} \quad & (\alpha_1 \alpha_2) \mathbf{u} = \alpha_1 (\alpha_2 \mathbf{u}) = \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{u} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nel seguito si sottointenderà che il campo vettoriale si definisce sul campo reale.

2.1.2 Vettori linearmente indipendenti

I vettori di un insieme $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ sono detti linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare che fornisce il vettore nullo è quella banale, cioè con tutti i coefficienti pari a zero, ovvero quando si ha:

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_m \mathbf{u}_m = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0 \quad (2.4)$$

2.1.3 Funzioni lineari

Una funzione (o anche 'operatore', o 'trasformazione') $\mathbf{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ che associa ai vettori di uno spazio vettoriale \mathcal{U} quelli di un altro spazio vettoriale \mathcal{V} si dice lineare se vale la relazione:

$$\mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 \mathbf{A}(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 \mathbf{A}(\mathbf{u}_2) \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{R} \quad (2.5)$$

Per un operatore lineare si usa spesso (quando la necessità di chiarezza non richieda diversamente) non indicare l'argomento in parentesi, ponendosi dunque: $\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{S} \mathbf{u}$.

2.1.4 Spazi di dimensione finita e basi

Uno spazio vettoriale \mathcal{U} si dice di dimensione finita n , e si indicherà qui con \mathcal{U}_n , quando il numero massimo di vettori linearmente indipendenti di \mathcal{U} è n . Un insieme di n vettori linearmente indipendenti, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, è detto allora una base di \mathcal{U} , e può dimostrarsi facilmente che un qualsiasi vettore di \mathcal{U} può ottenersi in un unico modo come combinazione lineare di $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Pertanto si ha¹:

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}_n \exists | u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathfrak{R} : \mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n \quad (2.6)$$

Esistono infinite basi di uno spazio vettoriale di dimensione finita n ma tutte le basi hanno lo stesso numero n di vettori. Gli scalari u_i , $i = 1, \dots, n$, sono detti le componenti di \mathbf{u} rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Nel seguito, a seconda delle necessità, si utilizzeranno equivalentemente le seguenti notazioni:

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{e}_i \quad (2.7)$$

l'ultima delle quali è nota come convenzione dell'indice ripetuto. Essa sottointende l'operazione di sommatoria sull'indice ripetuto due volte all'interno della stessa relazione e viene spesso utilizzata quando sia chiaro che la sommatoria va svolta per i che va da 1 a n . Analogamente, quando è chiara dal contesto la dimensione dello spazio, una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ si indicherà semplicemente con $\{\mathbf{e}_i\}$.

¹Il simbolo $\exists |$ indica che tale combinazione lineare esiste ed è unica.

2.1.5 Lo spazio Euclideo tridimensionale

Lo spazio tridimensionale che ci circonda è efficacemente schematizzato come uno spazio vettoriale, che si indicherà con \mathcal{U} . Un vettore di tale spazio è individuato da un segmento orientato, e quindi dal suo modulo (ovvero la lunghezza del segmento), dalla sua direzione e dal suo verso.

In generale, i vettori di tale spazio vengono considerati quali ‘vettori liberi’, nel senso che segmenti diversi ma aventi modulo, direzione e verso uguali, si dicono ‘equipollenti’ ed identificano lo stesso vettore.

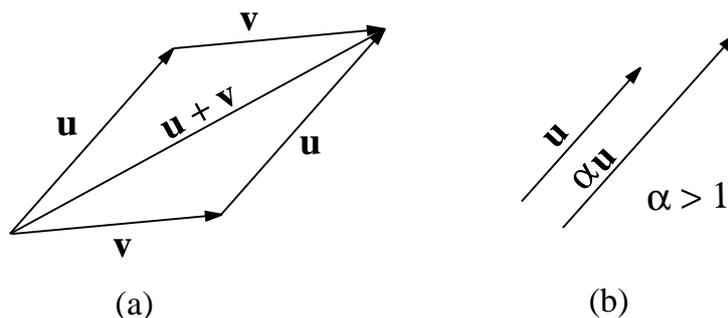


Figura 2.1: Operazioni nello spazio euclideo tridimensionale (o bidimensionale): (a) somma di due vettori; (b) moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

In alcuni casi conviene considerare i vettori come vettori applicati, per cui due vettori equipollenti ma aventi estremi iniziale e finale diversi identificano due vettori applicati diversi. Conviene però qui assumere i vettori quali vettori liberi, poiché un vettore applicato può semplicemente caratterizzarsi mediante l’associazione del vettore stesso, considerato quale vettore libero, e del punto di applicazione.

L’insieme di tutti i segmenti orientati assume struttura di uno spazio vettoriale quando si introduce l’operazione di somma di due vettori, mediante la ben nota regola del parallelogramma, e della moltiplicazione di uno scalare α per un vettore \mathbf{u} (figura 2.1).

Il modulo di un vettore \mathbf{u} è anche detto ‘norma’ di \mathbf{u} e viene indicato con $\|\mathbf{u}\|$.

Dati due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} , sia $\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}$ il minore degli angoli da essi formati. Si definisce prodotto scalare, e si indica con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, il numero reale:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}} \quad (2.8)$$

Il prodotto scalare è dunque una funzione che associa ad ogni coppia di vettori \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 di \mathcal{U} un numero reale che si indica con $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$. Tale funzione gode delle seguenti proprietà:

è definita positiva $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \quad \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

è simmetrica $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1$

è bilineare
$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1) + \alpha_2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_2) \\ (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u} = \alpha_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}) + \alpha_2 (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}) \end{cases} \quad (2.9)$$

comunque scelti $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U}$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Una funzione definita su \mathcal{U} ed a valori reali è anche detta una ‘forma’, e quindi in virtù delle (2.9) si dice anche che il prodotto scalare è una forma bilineare, simmetrica e definita positiva. Uno spazio vettoriale di dimensione finita in cui è definita una forma bilineare, simmetrica e definita positiva è anche detto uno spazio Euclideo.

Nel seguito ci si riferirà esplicitamente al caso dello spazio euclideo tridimensionale, che è ovviamente di estrema importanza nella meccanica in quanto consente di schematizzare matematicamente lo spazio tridimensionale che ci circonda. Tutto quanto si dirà può essere facilmente specializzato al caso dello spazio bidimensionale, che rappresenta un sottospazio di quello tridimensionale.

2.1.6 Basi ortonormali

Una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathcal{U} si dice ortonormale quando i suoi vettori sono di modulo unitario e sono a due a due ortogonali fra loro, ovvero quando risulta:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.10)$$

dove δ_{ij} indica il simbolo di Kronecker, definito da²:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.11)$$

In uno spazio vettoriale euclideo in cui si sceglie una base ortonormale valgono alcune importanti proprietà.

Una prima riguarda la possibilità di ottenere le componenti di un vettore rispetto alla base ortonormale come prodotto scalare del vettore stesso per i vettori della base. In particolare la componente i -esima di un vettore \mathbf{u} si ottiene come prodotto scalare tra \mathbf{u} e \mathbf{e}_i , ovvero $u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$. Infatti si ha³:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = (u_j \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i = u_j (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) = \delta_{ij} u_j = u_i \quad (2.12)$$

E’ utile come esercizio particularizzare la relazione precedente per calcolare, ad esempio, la prima componente del generico vettore \mathbf{u} . La relazione (2.12) si scrive per esteso come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 &= (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = u_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + u_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \\ &= u_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + u_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + u_3 (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1) = u_1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

²In altre parole, δ_{ij} rappresenta la componente ij della matrice identica:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

³Si noti che non si può sostituire $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ nella relazione (2.12) in quanto l’indice i è stato già utilizzato. Si potrebbe invece sostituire l’indice j con qualsiasi altro indice, poiché su di esso si svolge la sommatoria. Si suole indicare ciò anche dicendo che l’indice j è un indice ‘muto’.

in quanto $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$, mentre $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$.

In figura 2.2 si dà una interpretazione geometrica di quanto detto per un vettore del piano, ovvero di uno spazio euclideo bidimensionale. Essendo la base ortonormale, le componenti del vettore \mathbf{u} in figura si ottengono come proiezioni ortogonali del vettore stesso sui vettori della base. Per la componente 1, ad esempio, si ha che $u_1 = \|\mathbf{u}\| \cos \widehat{\mathbf{u}\mathbf{e}_1}$. Essendo $\|\mathbf{e}_1\| = 1$, si ottiene in definitiva: $u_1 = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{e}_1\| \cos \widehat{\mathbf{u}\mathbf{e}_1} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1$.

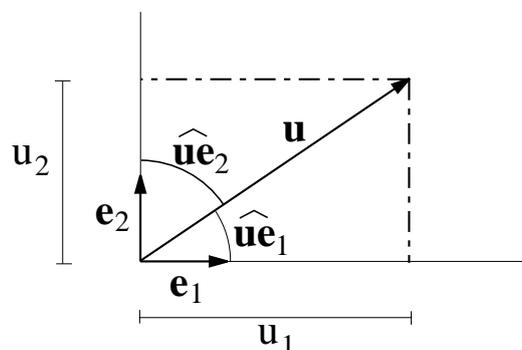


Figura 2.2: Componenti del vettore del piano \mathbf{u} rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Rispetto ad una base ortonormale, il prodotto scalare tra due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} si ottiene come somma dei prodotti delle componenti omologhe di \mathbf{u} e \mathbf{v} . Infatti si ha⁴:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_j \mathbf{e}_j) \cdot (v_i \mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) u_j v_i = \delta_{ij} u_j v_i = u_i v_i \quad (2.14)$$

La relazione precedente si può anche scrivere:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (2.15)$$

2.1.7 Tensori e matrici associate ad un tensore

In seguito si considereranno sempre funzioni lineari che trasformano vettori di \mathcal{U} in altri vettori ancora di \mathcal{U} , ovvero funzioni $\mathbf{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. Una funzione di tale tipo è detta un tensore.

⁴Svolgendo per esteso i passaggi si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) \cdot (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) = \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 u_1 v_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 u_2 v_1 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 u_3 v_1 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 u_1 v_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 u_2 v_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 u_3 v_2 + \\ &+ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 u_1 v_3 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 u_2 v_3 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 u_3 v_3 = \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 u_1 v_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 u_2 v_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 u_3 v_3 = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \end{aligned}$$

Sia \mathbf{u} un vettore di \mathcal{U} e $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ il suo trasformato tramite il tensore \mathbf{A} . Si ha dunque:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (2.16)$$

Assegnata una base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$, si ha:

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{A} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.17)$$

dove le parentesi si sono eliminate in quanto, affinché si possa avere uno scalare come risultato dell'operazione $\mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$, bisogna necessariamente calcolare prima $\mathbf{A} \mathbf{u}$ e poi moltiplicare scalarmente il vettore ottenuto per \mathbf{e}_i . Esprimendo \mathbf{u} in termini di componenti rispetto ad $\{\mathbf{e}_i\}$, ovvero ponendo $\mathbf{u} = u_j \mathbf{e}_j$, e sfruttando la linearità di \mathbf{A} , si ha⁵:

$$v_i = \mathbf{A} (u_j \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{A} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) u_j \quad (2.18)$$

La matrice A la cui componente A_{ij} è data da:

$$A_{ij} = \mathbf{A} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.19)$$

è detta matrice associata al tensore \mathbf{A} rispetto alla base $\{\mathbf{e}_i\}$. Infatti sostituendo la (2.19) nella (2.18) si ha:

$$v_i = A_{ij} u_j \quad (2.20)$$

In forma matriciale, la (2.20) diventa:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{A} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{A} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{A} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{A} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{A} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{A} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{A} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Pertanto, assegnata una base ortonormale, il vettore delle componenti di \mathbf{v} , trasformato tramite il tensore \mathbf{A} del vettore \mathbf{u} , si ottiene effettuando il prodotto righe per colonne della matrice associata ad \mathbf{A} per il vettore delle componenti di \mathbf{u} rispetto alla stessa base. Tale matrice, con un consapevole abuso di notazione volto a semplificare il formalismo, verrà indicata anch'essa con \mathbf{A} .

Dalla (2.21) si vede anche che gli elementi della prima colonna della matrice associata al tensore \mathbf{A} rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sono le componenti del vettore $\mathbf{A} \mathbf{e}_1$ rispetto alla base stessa. Analogamente gli elementi della seconda colonna sono le componenti del vettore $\mathbf{A} \mathbf{e}_2$ mentre gli elementi della terza colonna sono le componenti del vettore $\mathbf{A} \mathbf{e}_3$. In generale, gli elementi della colonna j -esima sono le componenti del vettore $\mathbf{A} \mathbf{e}_j$, ovvero del trasformato tramite \mathbf{A} del vettore \mathbf{e}_j . L'elemento A_{ij} è allora la i -esima componente del vettore $\mathbf{A} \mathbf{e}_j$.

⁵Per esteso, nel caso $i = 1$, si ha

$$v_1 = \mathbf{A} (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = (\mathbf{A} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) u_1 + (\mathbf{A} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) u_2 + (\mathbf{A} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1) u_3$$

2.1.8 Prodotto fra tensori

La composizione di due tensori \mathbf{A} e \mathbf{B} , detta anche prodotto di \mathbf{A} per \mathbf{B} , è a sua volta un tensore definito dalla relazione:

$$(\mathbf{A B}) \mathbf{u} = \mathbf{A} (\mathbf{B u}) \quad \forall \mathbf{u} \quad (2.22)$$

Il prodotto di due tensori gode della proprietà associativa, per cui $(\mathbf{A B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} (\mathbf{B C}) = \mathbf{A B C}$, ma non di quella commutativa, poiché in generale $\mathbf{A B} \neq \mathbf{B A}$. Se si ha invece che $\mathbf{A B} = \mathbf{B A}$ si dice che i due tensori \mathbf{A} e \mathbf{B} commutano.

La matrice associata al prodotto $\mathbf{A B}$ rispetto ad una base ortonormale si ottiene mediante il prodotto righe per colonne delle matrici associate ad \mathbf{A} ed a \mathbf{B} rispetto alla stessa base. Infatti si ha:

$$(\mathbf{A B a})_i = (\mathbf{A B})_{ij} a_j \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{U} \quad (2.23)$$

ed inoltre:

$$(\mathbf{A B a})_i = A_{ik} (\mathbf{B a})_k = A_{ik} (B_{kj} a_j) = (A_{ik} B_{kj}) a_j \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{U} \quad (2.24)$$

da cui:

$$(\mathbf{A B})_{ij} = A_{ik} B_{kj} \quad (2.25)$$

L'ultima relazione rappresenta appunto, in forma indiciale, il prodotto righe per colonne. Infatti, l'elemento ij della matrice $\mathbf{A B}$, si ottiene come somma dei prodotti delle componenti omologhe della riga i -esima di \mathbf{A} e della colonna j -esima di \mathbf{B} ⁶.

Per esteso, per $n = 3$, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{A B} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} + A_{13} B_{31} & A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} + A_{13} B_{32} & A_{11} B_{13} + A_{12} B_{23} + A_{13} B_{33} \\ A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} + A_{23} B_{31} & A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22} + A_{23} B_{32} & A_{21} B_{13} + A_{22} B_{23} + A_{23} B_{33} \\ A_{31} B_{11} + A_{32} B_{21} + A_{33} B_{31} & A_{31} B_{12} + A_{32} B_{22} + A_{33} B_{32} & A_{31} B_{13} + A_{32} B_{23} + A_{33} B_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.1.9 Prodotto tensoriale

Assegnati due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} di \mathcal{U} , si definisce prodotto tensoriale di \mathbf{a} per \mathbf{b} , e si indica con $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, il tensore definito dalla seguente relazione:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{c} \stackrel{def.}{=} \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{U} \quad (2.27)$$

⁶Al variare di k , gli elementi A_{ik} sono proprio gli elementi della riga i -esima di \mathbf{A} , mentre gli elementi B_{kj} sono proprio gli elementi della colonna j -esima di \mathbf{B}

In componenti si ha:

$$[(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{c}]_i = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} c_j \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{U} \quad (2.28)$$

ed inoltre, dalla definizione (2.27):

$$[(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{c}]_i = [\mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})]_i = a_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = a_i (b_j c_j) = (a_i b_j) c_j \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{U} \quad (2.29)$$

da cui si ricava:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j \quad (2.30)$$

La matrice associata al tensore $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ è dunque la seguente:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Nello spazio euclideo tridimensionale, la matrice associata al prodotto tensoriale di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} è invece la seguente:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

2.1.10 Cambiamento di base

Si è visto che, assegnato un vettore o un tensore, la loro rappresentazione numerica si ottiene scegliendo una base nello spazio vettoriale. Se n è la dimensione dello spazio, la rappresentazione numerica del vettore è un vettore numerico di \mathfrak{R}^n , ovvero una matrice di dimensione $n \times 1$, mentre quella del tensore è una matrice di dimensione $n \times n$. Si è visto anche come ottenere tali componenti rispetto ad una base ortonormale.

Evidentemente uno stesso vettore o uno stesso tensore hanno rappresentazione numerica diversa rispetto a basi diverse. Si vuole qui determinare le relazioni che consentono di passare dalla rappresentazione rispetto ad una base ortonormale a quella rispetto ad una seconda base ancora ortonormale.

Siano allora assegnate le due basi ortonormali $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{e}'_i\}$. Le componenti u'_i si ottengono come noto:

$$u'_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}'_i \quad (2.33)$$

Sostituendo in tale relazione l'espressione di \mathbf{u} in termini di componenti rispetto ad $\{\mathbf{e}_i\}$, ovvero $\mathbf{u} = u_j \mathbf{e}_j$, si ottiene ⁷:

$$u'_i = (u_j \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}'_i = u_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i) u_j = Q_{ij} u_j \quad (2.34)$$

⁷Per esteso, assumendo come esempio $i = 2$, si ha:

$$u'_2 = (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}'_2 = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2) u_1 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2) u_2 + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2) u_3 = Q_{21} u_1 + Q_{22} u_2 + Q_{23} u_3$$

ovvero

$$u'_i = Q_{ij} u_j \quad (2.35)$$

La matrice Q_{ij} la cui componente ij , come visto nella relazione precedente, è data da

$$Q_{ij} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i \quad (2.36)$$

è detta matrice del cambiamento di base. Per esteso si ha:

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_3 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_3 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_3 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_3 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Dunque il prodotto righe per colonne di \mathbf{Q} per il vettore delle componenti di \mathbf{u} rispetto a $\{\mathbf{e}_i\}$ fornisce il vettore delle componenti di \mathbf{u} rispetto a $\{\mathbf{e}'_i\}$.

Chiamando, per semplicità, 'vecchia base' $\{\mathbf{e}_i\}$ e 'nuova base' $\{\mathbf{e}'_i\}$, è utile osservare che nella j -esima colonna di \mathbf{Q} sono ordinate le componenti del vettore \mathbf{e}_j della vecchia base rispetto alla nuova base $\{\mathbf{e}'_i\}$.

Si consideri un esempio ulteriore in dimensione 2 ($n = 2$). Sia α l'angolo di cui deve ruotare in senso antiorario la vecchia base $\{\mathbf{e}_i\}$ per sovrapporsi alla nuova $\{\mathbf{e}'_i\}$ (figura 2.3).

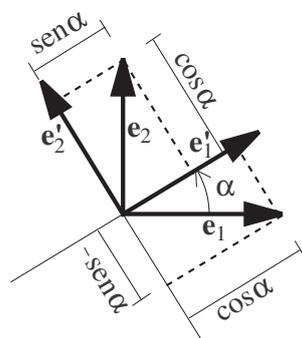


Figura 2.3: Cambiamento di base.

Si ha in questo caso:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Indicando, con il solito consapevole abuso di notazione, con \mathbf{u} oltre al vettore geometrico anche il vettore numerico ad esso associato rispetto alla base $\{\mathbf{e}_i\}$, e con \mathbf{u}' il vettore numerico associato ad \mathbf{u} rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_i\}$, la (2.35) si scrive:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Q} \mathbf{u} \quad (2.39)$$

Si dimostra che la matrice di passaggio da una base ortonormale ad un'altra anch'essa ortonormale è ortogonale, ovvero caratterizzata, tra le altre proprietà, da quella per cui la sua inversa coincide con la trasposta:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^t \quad (2.40)$$

Invertendo la (2.39) e sfruttando il fatto che \mathbf{Q} è ortogonale si ha:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}^t \mathbf{u}' \quad (2.41)$$

Si vuole ora vedere come cambia la matrice associata ad un tensore quando cambia la base. A questo scopo, indicando ancora con \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{A} sia i due vettori ed il tensore che i vettori numerici e la matrice rispetto alla vecchia base $\{\mathbf{e}_i\}$, e con \mathbf{u}' , \mathbf{v}' e \mathbf{A}' i vettori numerici e la matrice rispetto alla nuova base $\{\mathbf{e}'_i\}$, si ha:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (2.42)$$

anche in termini di rappresentazioni numeriche, ovvero per i vettori numerici \mathbf{u} , \mathbf{v} e la matrice \mathbf{A} . Utilizzando allora le formule (2.39) e (2.41) per il cambiamento di base si ricava:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^t \mathbf{u}' = \mathbf{A}' \mathbf{u}' \quad (2.43)$$

La matrice \mathbf{A}' associata al tensore \mathbf{A} rispetto alla nuova base $\{\mathbf{e}'_i\}$ si ottiene pertanto da:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^t \quad (2.44)$$

2.1.11 Richiami di analisi tensoriale

Assegnata un'origine nello spazio tridimensionale, ogni punto dello spazio può essere identificato mediante il suo vettore posizione \mathbf{x} avente l'estremo iniziale nell'origine e quello finale nel punto stesso. Introducendo l'usuale prodotto scalare, l'insieme dei vettori posizione dello spazio assume la struttura di spazio euclideo.

Si introduca nello spazio euclideo tridimensionale una base ortonormale, che si indicherà con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ oppure con $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ a seconda della convenienza. Il vettore di \mathbb{R}^3 delle componenti di un vettore posizione \mathbf{x} rispetto a tale base si indicherà dunque nei due seguenti modi alternativi:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

La prima delle due notazioni è conveniente quando si voglia compattare le relazioni mediante la notazione indiciale. La seconda è utile adoperarla in quanto molto utilizzata.

Si consideri un insieme Ω dello spazio euclideo tridimensionale. Una funzione che ad ogni punto $\mathbf{x} \in \Omega$ associa uno scalare $\phi = \phi(\mathbf{x})$ è detta un campo scalare.

Una funzione che ad ogni punto $\mathbf{x} \in \Omega$ associa un vettore $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ è detta un campo vettoriale.

Una funzione che ad ogni punto $\mathbf{x} \in \Omega$ associa un tensore $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è detta un campo tensoriale.

Gradiente di un campo scalare o vettoriale

Per quanto sia possibile dare una definizione generale dei gradienti di un campo scalare o vettoriale, qui si preferisce per semplicità fornire direttamente le formule che forniscono le componenti di tali gradienti rispetto ad una base ortonormale assegnata.

Sia assegnato un campo scalare ϕ definito su Ω , e sia ϕ derivabile almeno una volta rispetto a ciascuna delle componenti. Il gradiente di ϕ è un campo vettoriale, definito ancora su Ω , che si indica con $\nabla\phi$ oppure con $\text{grad}\phi$ e che in componenti è dato da:

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{,1} \\ \phi_{,2} \\ \phi_{,3} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

dove la virgola seguita dall'indice i indica l'operazione di derivata parziale rispetto alla componente x_i . In notazione indiciale si ha:

$$(\nabla\phi)_i = \phi_{,i} \quad (2.47)$$

Sia assegnato un campo vettoriale \mathbf{u} definito su Ω , e sia \mathbf{u} derivabile almeno una volta rispetto a ciascuna delle componenti. Il gradiente di \mathbf{u} è un campo tensoriale, definito ancora su Ω , che si indica con $\nabla\mathbf{u}$ oppure con $\text{grad}\mathbf{u}$, e che in componenti è dato da:

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

In notazione indiciale si ha:

$$(\nabla\mathbf{u})_{ij} = u_{i,j} \quad (2.49)$$

Divergenza di un campo vettoriale o tensoriale

Sia assegnato un campo vettoriale \mathbf{u} definito su Ω , e sia \mathbf{u} derivabile almeno una volta rispetto a ciascuna delle componenti. La divergenza di \mathbf{u} è un campo scalare, definito ancora su Ω , che si indica con $\text{div}\mathbf{u}$ e che in componenti è dato da:

$$\text{div}\mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = u_{i,i} \quad (2.50)$$

Sia assegnato un campo tensoriale \mathbf{A} definito su Ω , e sia \mathbf{A} derivabile almeno una volta rispetto a ciascuna delle componenti. La divergenza di \mathbf{A} è un campo vettoriale,

definito ancora su Ω , che si indica con $\text{div } \mathbf{A}$ e che in componenti è dato da:

$$\text{div } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

In notazione indiciale si ha:

$$(\text{div } \mathbf{A})_i = A_{ij,j} \quad (2.52)$$

Teorema della divergenza per un campo vettoriale

Sia assegnato un campo vettoriale \mathbf{u} su un dominio Ω dello spazio tridimensionale euclideo. Sia inoltre \mathbf{u} derivabile almeno una volta rispetto alle sue componenti e si faccia l'ipotesi che il contorno $\partial\Omega$ di Ω sia dotato di piano tangente in tutti i punti tranne al più un insieme di punti di misura nulla. Nell'ulteriore ipotesi che la divergenza di \mathbf{u} sia integrabile su Ω vale la seguente relazione:

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.53)$$

dove con \mathbf{n} si è indicata la normale uscente a $\partial\Omega$.

Il teorema della divergenza si enuncia anche dicendo che, nelle suddette ipotesi, il flusso del vettore \mathbf{u} attraverso il contorno di Ω è pari all'integrale della sua divergenza esteso a Ω .

In componenti la relazione (2.53) si scrive come segue:

$$\int_{\Omega} u_{i,i} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u_i n_i \, dS \quad (2.54)$$

Teorema della divergenza per un campo tensoriale

Sia assegnato un campo tensoriale \mathbf{A} su un dominio Ω dello spazio tridimensionale euclideo. Sia inoltre \mathbf{A} derivabile almeno una volta rispetto alle sue componenti e si faccia l'ipotesi che il contorno $\partial\Omega$ di Ω sia dotato di piano tangente in tutti i punti tranne al più un insieme di punti di misura nulla. Nell'ulteriore ipotesi che la divergenza di \mathbf{A} sia integrabile su Ω vale la seguente relazione:

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{A} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \mathbf{n} \, dS \quad (2.55)$$

dove con \mathbf{n} si è indicata la normale uscente a $\partial\Omega$, mentre $\mathbf{A} \mathbf{n}$ indica, come al solito, il trasformato di \mathbf{n} attraverso \mathbf{A} .

Il teorema della divergenza per un campo tensoriale si enuncia anche dicendo che, nelle suddette ipotesi, il flusso del tensore \mathbf{A} attraverso il contorno di Ω è pari all'integrale della sua divergenza esteso a Ω .

In componenti la relazione (2.55) si scrive come segue:

$$\int_{\Omega} A_{ij,j} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} A_{ij} n_j \, dS \quad (2.56)$$

ovvero per esteso:

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} A_{11,1} + A_{12,2} + A_{13,3} \\ A_{21,1} + A_{22,2} + A_{23,3} \\ A_{31,1} + A_{32,2} + A_{33,3} \end{bmatrix} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} dS \quad (2.57)$$

Il teorema della divergenza per un campo tensoriale si ricava come conseguenza di quello valido per un campo vettoriale considerando ciascuna delle tre componenti di $\text{div } \mathbf{A}$ come la divergenza di un campo vettoriale. Ad esempio, si consideri la seconda componente di $\text{div } \mathbf{A}$, che in notazione indiciale è data da $(\text{div } \mathbf{A})_2 = A_{2j,j}$. Per semplicità conviene cambiare l'indice 'muto' j in i , in modo da ottenere che⁸ $(\text{div } \mathbf{A})_2 = A_{2i,i}$. Sostituendo allora $u_{i,i}$ con $A_{2i,i}$ nella relazione (2.54) si ha.

$$\int_{\Omega} A_{2i,i} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} A_{2i} n_i \, dS \quad (2.58)$$

Cambiando di nuovo l'indice 'muto' i in j , si ottiene in definitiva:

$$\int_{\Omega} A_{2j,j} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} A_{2j} n_j \, dS \quad (2.59)$$

che rappresenta proprio la relazione (2.56) nel caso $i = 2$.

Ovviamente lo stesso ragionamento vale anche per $i = 1$ e per $i = 3$.

⁸Come si è già visto in precedenza in un caso analogo, essendo j nella relazione precedente un indice su cui bisogna effettuare una sommatoria, esso è detto muto in quanto può essere sostituito con qualsiasi altro indice non utilizzato nella relazione stessa.

2.2 Cinematica del modello continuo tridimensionale

Da un punto di vista fisico non esiste un materiale che sia privo di vuoti a qualsiasi scala lo si osservi. Tuttavia per molti materiali e per molte applicazioni ingegneristiche la scala di osservazione è tale che la loro schematizzazione come continui, cioè privi di vuoti, risulta efficace.

In questo capitolo si studia la cinematica del modello di continuo tridimensionale formulato nella prima metà dell'800 dal fisico-matematico Cauchy, modello che è di gran lunga il più utilizzato nelle applicazioni. Con esso un corpo continuo \mathcal{B} è definito mediante una corrispondenza biunivoca tra le sue particelle materiali ed i punti di un dominio connesso Ω dello spazio euclideo tridimensionale, identificati mediante il loro vettore posizione \mathbf{x} rispetto ad un origine O . Nella presente trattazione si assumerà che Ω sia un insieme chiuso e regolare, sulla cui frontiera il piano tangente è definito quasi ovunque, eccetto al più un insieme di punti di misura nulla.

La cinematica studia l'evoluzione della configurazione di \mathcal{B} rispetto al tempo t , attraverso una corrispondenza χ che ad ogni punto \mathbf{x} di Ω , che è anche detto 'configurazione di riferimento', associa, in ogni istante t , il punto $\mathbf{x}^* = \chi(\mathbf{x}, t)$ di un dominio $\Omega^* = \Omega(t)$, che è invece detto 'configurazione attuale'. Si precisa che Ω non deve in generale coincidere con una configurazione effettivamente assunta dal corpo. In questo contesto, tuttavia, per il tipo di applicazioni che si intende svolgere conviene supporre Ω coincidente con una 'configurazione iniziale' $\Omega(t_0)$ indeformata assunta ad un istante t_0 . Per brevità di notazione si sottintenderà la dipendenza da t e si scriverà quindi:

$$\mathbf{x}^* = \chi(\mathbf{x}) \quad (2.60)$$

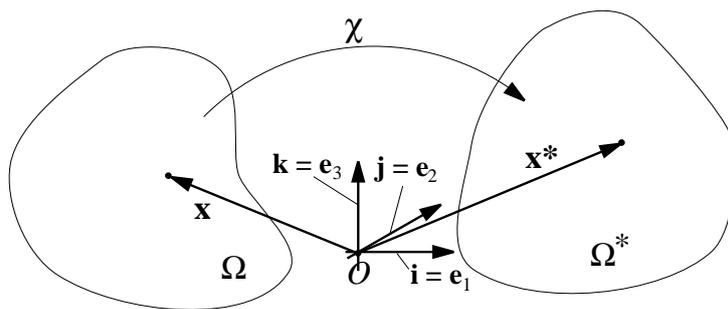


Figura 2.4: Deformazione.

L'intera sezione 2.2 è stata strutturata in modo tale da poter studiare solamente le sezioni 2.2.4, 2.2.8 e 2.2.9 omettendo il resto, in modo da acquisire la conoscenza solo dei risultati essenziali validi nell'ipotesi di piccoli spostamenti e, entro certi limiti, anche del loro significato fisico.

2.2.1 Gradiente della deformazione

Poiché si escludono dalla presente trattazione fenomeni di frattura o compenetrazione, la funzione χ si assume continua ed invertibile con inversa continua. Si assume inoltre che χ sia derivabile fino all'ordine di derivazione richiesto dagli sviluppi successivi. In particolare, si assume che sia una volta differenziabile e che dunque si abbia:

$$\chi(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}_o) + \nabla\chi(\mathbf{x}_o)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|) \quad \forall \mathbf{x}_o, \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.61)$$

dove il termine $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|)$ indica un infinitesimo di ordine superiore a quello di $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|$.

Per esprimere le relazioni (2.60) e (2.61) in termini di componenti, si introduce una base ortonormale che si indicherà, a seconda della convenienza del caso, con $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ o con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Le componenti dei vettori posizione \mathbf{x} e \mathbf{x}^* rispetto a tale base saranno indicate analogamente con le due notazioni alternative:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

La corrispondenza χ che definisce la deformazione del corpo è dunque esprimibile numericamente, rispetto a tale base, mediante la seguente funzione definita in \mathfrak{R}^3 ed a valori in \mathfrak{R}^3 :

$$\begin{cases} x^* = x^*(x, y, z) \\ y^* = y^*(x, y, z) \\ z^* = z^*(x, y, z) \end{cases} \quad (2.63)$$

mentre il gradiente della deformazione $\nabla\chi$ è espresso dalla matrice:

$$\nabla\chi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial x} & \frac{\partial x^*}{\partial y} & \frac{\partial x^*}{\partial z} \\ \frac{\partial y^*}{\partial x} & \frac{\partial y^*}{\partial y} & \frac{\partial y^*}{\partial z} \\ \frac{\partial z^*}{\partial x} & \frac{\partial z^*}{\partial y} & \frac{\partial z^*}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

2.2.2 Deformazione di un intorno elementare

Se si studia la deformazione che avviene in un intorno di un punto \mathbf{x}_o di Ω utilizzando l'espressione che si ottiene dalla (2.61) trascurando l'infinitesimo di ordine superiore $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|)$, ovvero l'espressione linearizzata seguente:

$$\chi(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}_o) + \nabla\chi(\mathbf{x}_o)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \quad (2.65)$$

si dice che si sta studiando la deformazione in un intorno elementare di \mathbf{x}_o , che si indicherà con I_o . Un tale intorno si trasforma mediante la deformazione (2.65) in un intorno

I_o^* di \mathbf{x}_o . Il gradiente $\nabla\chi(\mathbf{x}_o)$ si indica spesso con $\mathbf{F}(\mathbf{x}_o)$ ed è noto come ‘gradiente della deformazione’. Per brevità di notazione si ometterà quasi sempre nel seguito la dipendenza da \mathbf{x}_o e si porrà:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_o) = \nabla\chi(\mathbf{x}_o) \quad (2.66)$$

Sostituendo la (2.66) nella (2.65), e quest’ultima a sua volta nella (2.60), si ottiene:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_o^* + \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \quad (2.67)$$

avendo posto $\mathbf{x}_o^* = \chi(\mathbf{x}_o)$.

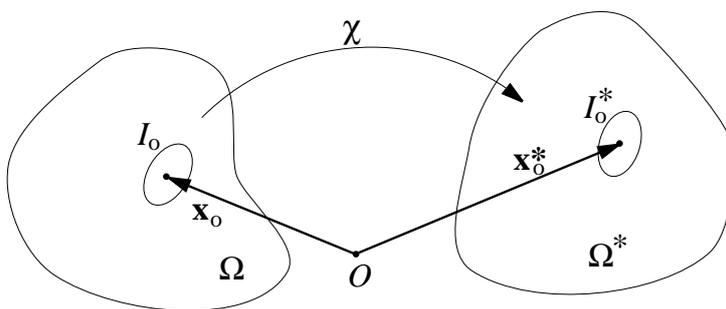


Figura 2.5: Deformazione di un intorno elementare.

Per assicurare l’invertibilità della trasformazione il determinante di \mathbf{F} deve essere non nullo. Inoltre per un motivo che sarà chiarito in seguito, si assume anche $\det \mathbf{F} > 0$.

La relazione (2.67) è somma di una trasformazione costante, data dal termine \mathbf{x}_o^* , e di una lineare costituita dal termine $\mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$. Una corrispondenza di tale tipo è anche detta una ‘trasformazione affine’, o ‘affinità’. Essa trasforma rette in rette, piani in piani, e conserva le relazioni di parallelismo. Per mostrare ciò si consideri una retta r_1 di equazione parametrica (figura 2.6):

$$\mathbf{x} \in r_1 \iff \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t \mathbf{h} \quad t \in \mathfrak{R} \quad (2.68)$$

che passa per il punto di posizione \mathbf{x}_1 ed è parallela al vettore \mathbf{h} .

Sostituendo l’espressione (2.68) di \mathbf{x} nella (2.67) si ottiene per \mathbf{x}^* l’espressione:

$$\mathbf{x} \in r_1 \iff \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_o^* + \mathbf{F}(\mathbf{x}_1 + t \mathbf{h} - \mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o^* + \mathbf{F}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_o) + \mathbf{F} t \mathbf{h} = \mathbf{x}_1^* + t(\mathbf{F} \mathbf{h}) \quad (2.69)$$

cioè nella retta r_1^* la cui equazione parametrica è:

$$\mathbf{x} \in r_1^* \iff \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_1^* + t \mathbf{h}^* \quad (2.70)$$

cioè una retta che passa per \mathbf{x}_1^* , trasformato di \mathbf{x}_1 , ed è parallela al vettore $\mathbf{h}^* = \mathbf{F} \mathbf{h}$.

Una retta r_2 parallela a r_1 ha equazione parametrica:

$$\mathbf{x} \in r_2 \iff \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + t \mathbf{h} \quad t \in \mathfrak{R} \quad (2.71)$$

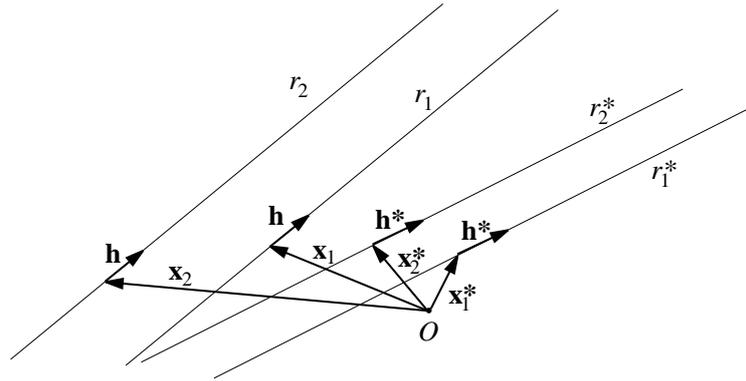


Figura 2.6: Trasformazione di rette parallele in rette parallele.

in quanto passerà per un generico punto \mathbf{x}_2 ma deve essere ancora parallela a \mathbf{h} . Analogamente a quanto visto per r_1, r_2 si trasforma in una retta r_2^* di equazione parametrica:

$$\mathbf{x} \in r_2^* \iff \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_2^* + t \mathbf{h}^* \quad (2.72)$$

Pertanto r_2^* è ancora parallela a r_1^* e quindi si è conservato il parallelismo nella trasformazione.

Si può mostrare con procedimento analogo che quadriche si trasformano in quadriche e che, in particolare, una sfera di I_o si trasforma in un ellissoide.

Dilatazione lineare di una fibra elementare

Si definisce una ‘fibra elementare’ f un segmento che unisce due punti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 di I_o . Indicato con $\mathbf{h} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ il vettore che unisce \mathbf{x}_1 ad \mathbf{x}_2 , la lunghezza l di f è data dal modulo di \mathbf{h} : $l = \|\mathbf{h}\|$. La fibra f si trasforma mediante la (2.65) in una f^* data dal segmento⁹ che unisce i due punti \mathbf{x}_1^* e \mathbf{x}_2^* di I_o trasformati di \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . Detto $\mathbf{h}^* = \mathbf{x}_2^* - \mathbf{x}_1^*$ il vettore che unisce \mathbf{x}_1^* ad \mathbf{x}_2^* la lunghezza l^* di f^* è data dal modulo di \mathbf{h}^* : $l^* = \|\mathbf{h}^*\|$. Avendosi:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1^* &= \mathbf{x}_o^* + \mathbf{F}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_o) \\ \mathbf{x}_2^* &= \mathbf{x}_o^* + \mathbf{F}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_o) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{h}^* = \mathbf{x}_2^* - \mathbf{x}_1^* = \mathbf{F}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \mathbf{F} \mathbf{h} \quad (2.73)$$

si ha che $l^* = \|\mathbf{F} \mathbf{h}\|$.

Si definisce ‘dilatazione lineare’ della fibra f e si indica con ε il rapporto:

$$\varepsilon = \frac{l^* - l}{l} \quad (2.74)$$

Dalla (2.73) si ottiene:

$$\varepsilon = \frac{\|\mathbf{F} \mathbf{h}\| - \|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\|\mathbf{F} \mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} - 1 = \sqrt{\frac{\mathbf{F} \mathbf{h} \cdot \mathbf{F} \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|^2}} - 1 = \sqrt{\frac{\mathbf{F}^t \mathbf{F} \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|^2}} - 1 \quad (2.75)$$

⁹Poiché la (2.65) trasforma rette in rette, essa trasforma anche segmenti in segmenti.

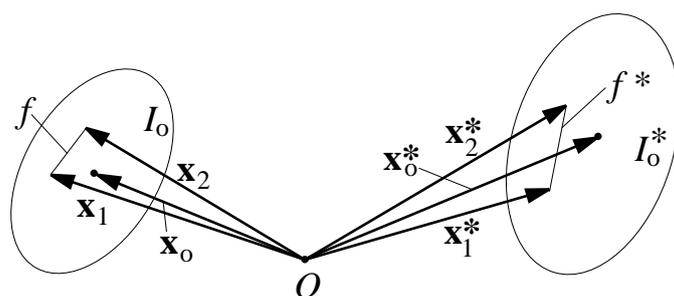


Figura 2.7: Dilatazione della fibra elementare.

Introducendo il versore $\mathbf{e} = \mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|$ la (2.75) fornisce:

$$\varepsilon = \sqrt{\mathbf{F}^t \mathbf{F} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} - 1 \quad (2.76)$$

In meccanica del continuo è molto utilizzato il tensore \mathbf{D} definito da:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.77)$$

che prende il nome di ‘tensore della deformazione di Green’. Avendosi dalla (2.77):

$$\mathbf{F}^t \mathbf{F} = 2\mathbf{D} + \mathbf{I} \quad (2.78)$$

sostituendo nella (2.76) si ricava:

$$\varepsilon = \sqrt{(2\mathbf{D} + \mathbf{I}) \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} - 1 = \sqrt{2\mathbf{D} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{I} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} - 1 = \sqrt{2\mathbf{D} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} - 1 \quad (2.79)$$

Essendo poi $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \|\mathbf{e}\|^2 = 1$ si ricava la seguente espressione per la dilatazione lineare:

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{e}) = \sqrt{1 + 2\mathbf{D} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} - 1 \quad (2.80)$$

Dalla (2.80) si riconosce che $\varepsilon(-\mathbf{e}) = \varepsilon(\mathbf{e})$, ovvero la dilatazione lineare è funzione pari dei coseni direttori di \mathbf{e} . Pertanto tutte le fibre elementari parallele al versore \mathbf{e} e sono caratterizzate dalla stessa dilatazione lineare, la cui espressione è data dalla (2.80), che dipende solo dalla direzione della fibra.

Scorrimento tra due fibre elementari ortogonali

Si considerino due fibre elementari f_a e f_b di I_0 , ortogonali fra loro, parallele a due vettori \mathbf{h}_a e \mathbf{h}_b , di versori $\mathbf{e}_a = \mathbf{h}_a/\|\mathbf{h}_a\|$ e $\mathbf{e}_b = \mathbf{h}_b/\|\mathbf{h}_b\|$ e si suppongano le fibre orientate secondo le direzioni di \mathbf{h}_a e \mathbf{h}_b . Si indichi con α_{ab}^* il minore tra gli angoli formati tra i due vettori \mathbf{h}_a^* e \mathbf{h}_b^* trasformati di \mathbf{h}_a e \mathbf{h}_b . Si ha dunque:

$$\cos \alpha_{ab}^* = \frac{\mathbf{h}_a^* \cdot \mathbf{h}_b^*}{\|\mathbf{h}_a^*\| \|\mathbf{h}_b^*\|} = \frac{\mathbf{F} \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{F} \mathbf{h}_b}{\|\mathbf{F} \mathbf{h}_a\| \|\mathbf{F} \mathbf{h}_b\|} \quad (2.81)$$

Essendo le due fibre ortogonali nella configurazione iniziale il minore degli angoli formati da \mathbf{h}_a e \mathbf{h}_b è $\alpha_{ab} = \pi/2$.

Si definisce ‘scorrimento’ γ_{ab} fra le due fibre orientate f_a e f_b la diminuzione del minore degli angoli formati tra le fibre durante la deformazione. Si ha dunque:

$$\gamma_{ab} = -(\alpha_{ab}^* - \alpha_{ab}) = \frac{\pi}{2} - \alpha_{ab}^* \quad (2.82)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \text{sen } \gamma_{ab} &= \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{ab}^* \right) = \cos \alpha_{ab}^* = \frac{\mathbf{F} \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{F} \mathbf{h}_b}{\|\mathbf{F} \mathbf{h}_a\| \|\mathbf{F} \mathbf{h}_b\|} = \frac{\mathbf{F}^t \mathbf{F} \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b}{\|\mathbf{F} \mathbf{h}_a\| \|\mathbf{F} \mathbf{h}_b\|} \\ &= \frac{(2\mathbf{D} + \mathbf{I}) \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b}{\|\mathbf{F} \mathbf{h}_a\| \|\mathbf{F} \mathbf{h}_b\|} = \frac{2\mathbf{D} \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b + \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b}{\|\mathbf{F} \mathbf{h}_a\| \|\mathbf{F} \mathbf{h}_b\|} = \frac{2\mathbf{D} \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b}{\|\mathbf{F} \mathbf{h}_a\| \|\mathbf{F} \mathbf{h}_b\|} \end{aligned} \quad (2.83)$$

dove si è sfruttata l’ortogonalità tra \mathbf{h}_a e \mathbf{h}_b per cui $\mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b = 0$.

Ponendo $\varepsilon_a = \varepsilon(\mathbf{e}_a)$ e $\varepsilon_b = \varepsilon(\mathbf{e}_b)$ dalla (2.75) risulta:

$$\|\mathbf{F} \mathbf{h}_a\| = (1 + \varepsilon_a) \|\mathbf{h}_a\| \quad \|\mathbf{F} \mathbf{h}_b\| = (1 + \varepsilon_b) \|\mathbf{h}_b\| \quad (2.84)$$

Sostituendo nella (2.83) si ottiene:

$$\text{sen } \gamma_{ab} = \frac{2\mathbf{D} \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b}{(1 + \varepsilon_a)(1 + \varepsilon_b)\|\mathbf{h}_a\| \|\mathbf{h}_b\|} \quad (2.85)$$

da cui, essendo $\mathbf{h}_a/\|\mathbf{h}_a\| = \mathbf{e}_a$ e $\mathbf{h}_b/\|\mathbf{h}_b\| = \mathbf{e}_b$, si ricava l’espressione finale:

$$\text{sen } \gamma_{ab} = \frac{2\mathbf{D} \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b}{(1 + \varepsilon_a)(1 + \varepsilon_b)} \quad (2.86)$$

2.2.3 Dilatazione volumetrica

Detti ΔV_o il volume di un intorno I_o di un punto $\mathbf{x}_o \in \Omega$ e ΔV_o^* quello del suo trasformato I_o^* mediante la (2.60), si definisce ‘dilatazione volumetrica’, o ‘dilatazione cubica’, e si indica con Θ , il limite:

$$\Theta = \lim_{\Delta V_o \rightarrow 0} \frac{\Delta V_o^* - \Delta V_o}{\Delta V_o} \quad (2.87)$$

Da un teorema di analisi è noto che:

$$\Delta V_o^* = \int_{I_o} (\det \mathbf{F}(\mathbf{x})) d\Omega = (\det \mathbf{F})_m \Delta V_o \quad (2.88)$$

dove con $(\det \mathbf{F})_m$ si è indicato il valor medio di $\det \mathbf{F}$ su I_o . Dalle (2.147)-(2.88) si ricava:

$$\frac{\Delta V_o^* - \Delta V_o}{\Delta V_o} = \frac{(\det \mathbf{F})_m \Delta V_o - \Delta V_o}{\Delta V_o} = (\det \mathbf{F})_m - 1 \quad (2.89)$$

Per la continuità ipotizzata di \mathbf{F} il suo valore medio su I_o tende a quello puntuale $\mathbf{F}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{F}$ al tendere a zero del volume di I_o , cioè di ΔV_o , per cui si ottiene al limite:

$$\Theta = \det \mathbf{F} - 1 \quad (2.90)$$

Dalla (2.88) si chiarisce che affinché il volume ΔV_o^* di I_o^* sia positivo per ogni intorno I_o di ogni punto $\mathbf{x}_o \in \Omega$, come fisicamente è naturale assumere, deve risultare $\det \mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$.

2.2.4 Spostamenti

Lo spostamento del generico punto materiale dalla sua posizione \mathbf{x} in Ω in quella \mathbf{x}^* in Ω^* è dato da (figura 2.8):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* - \mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \quad (2.91)$$

Derivando tale relazione si ottiene:

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \chi(\mathbf{x}) - \mathbf{I} \quad (2.92)$$

Si assuma un sistema di riferimento con origine in un arbitrario punto O ed una base ortonormale levogira. A seconda dei casi si indicheranno talvolta con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i versori della base e con 1, 2 e 3 e i relativi assi orientati con origine in O , altre volte con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori della base e con x, y e z gli assi. La prima scelta consente di utilizzare la notazione indiciale per cui ad esempio le componenti del vettore \mathbf{u} si indicano con u_i , con $i = 1, 2, 3$, mentre con la seconda scelta tali componenti si indicano con u_x, u_y, u_z . Ovviamente la scelta dell'una o dell'altra notazione è assolutamente ininfluente sui risultati.

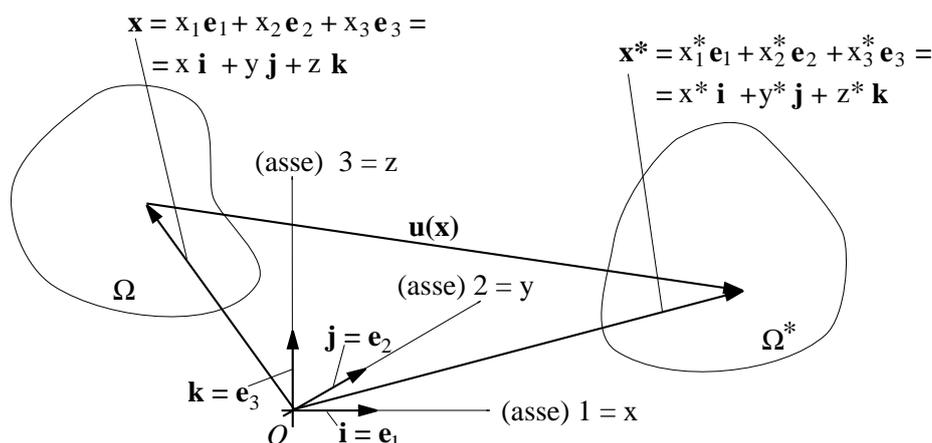


Figura 2.8: Spostamento e sistema di riferimento.

Rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ il gradiente $\nabla \mathbf{u}$ è rappresentato dalla seguente matrice, che per brevità di notazione verrà indicata anch'essa con $\nabla \mathbf{u}$:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

In notazione indiciale si scriverà sinteticamente $(\nabla \mathbf{u})_{ij} = u_{i,j}$.

2.2.5 Spostamenti dell'intorno elementare

Nello stesso spirito con cui si assume lecito utilizzare l'espressione linearizzata (2.65) per la trasformazione χ di un intorno elementare I_o , gli spostamenti in I_o possono essere linearizzati in modo analogo come segue:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \quad (2.94)$$

Riscrivendo la (2.92) in \mathbf{x}_o in termini di $\mathbf{F}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{F}$ si ottiene:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (2.95)$$

dove nell'ultimo termine si è sottointeso che $\nabla \mathbf{u}$ va calcolato in \mathbf{x}_o . Il tensore della deformazione di Green si riscrive allora in funzione di $\nabla \mathbf{u}$ come segue:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^t (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{I}] \quad (2.96)$$

ovvero:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^t \quad (2.97)$$

in cui il primo termine è lineare in $\nabla \mathbf{u}$ mentre il secondo è funzione quadratica di $\nabla \mathbf{u}$. Rispetto alla base adottata ed usando la notazione indiciale si ha che $[(\nabla \mathbf{u})^t]_{ik} = (\nabla \mathbf{u})_{ki} = u_{k,i}$ ed inoltre il prodotto $(\nabla \mathbf{u})^t (\nabla \mathbf{u})$ si traduce nel 'prodotto righe per colonne':

$$[(\nabla \mathbf{u})^t (\nabla \mathbf{u})]_{ij} = [(\nabla \mathbf{u})^t]_{ik} (\nabla \mathbf{u})_{kj} = u_{k,i} u_{k,j} \quad (2.98)$$

dove si è utilizzata la convenzione dell'indice ripetuto¹⁰. Pertanto risulta:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad (2.100)$$

Esplicitando i termini della (2.100) si ha:

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 1 \end{array} \right\} \rightarrow D_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) =$$

$$= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.101)$$

¹⁰Secondo la convenzione dell'indice ripetuto va sempre svolta la sommatoria per l'indice k che varia nel suo intervallo di validità, in questo caso tra 1 e 3, pur omettendo per brevità il simbolo della sommatoria. Nel caso in esame non utilizzando tale convenzione andrebbe scritto esplicitamente:

$$[(\nabla \mathbf{u})^t (\nabla \mathbf{u})]_{ij} = \sum_{k=1}^3 [(\nabla \mathbf{u})^t]_{ik} (\nabla \mathbf{u})_{kj} = \sum_{k=1}^3 u_{k,i} u_{k,j} = u_{1,i} u_{1,j} + u_{2,i} u_{2,j} + u_{3,i} u_{3,j} \quad (2.99)$$

L'indice ripetuto è anche detto 'muto' in quanto, facendo riferimento ad esempio all'espressione (2.99), k può essere sostituito da un qualsiasi altro indice diverso da i e j , che sono stati già utilizzati.

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} i = 2 \\ j = 2 \end{array} \right] &\rightarrow D_{22} = u_{2,2} + \frac{1}{2}(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2) = \\
 &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} i = 3 \\ j = 3 \end{array} \right] &\rightarrow D_{33} = u_{3,3} + \frac{1}{2}(u_{1,3}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,3}^2) = \\
 &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 2 \end{array} \right] &\rightarrow D_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) + \frac{1}{2}(u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2}) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} i = 2 \\ j = 3 \end{array} \right] &\rightarrow D_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) + \frac{1}{2}(u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} i = 3 \\ j = 1 \end{array} \right] &\rightarrow D_{31} = \frac{1}{2}(u_{3,1} + u_{1,3}) + \frac{1}{2}(u_{1,3}u_{1,1} + u_{2,3}u_{2,1} + u_{3,3}u_{3,1}) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

ed inoltre per la simmetria¹¹ di \mathbf{D} :

$$D_{21} = D_{12} \quad D_{32} = D_{23} \quad D_{13} = D_{31} \quad (2.108)$$

2.2.6 Ipotesi di piccoli spostamenti

Si dice valida l'ipotesi di piccoli spostamenti se dati due punti A e B di Ω , detta l_{AB} la lunghezza di una qualsiasi curva che li unisca e che sia tutta contenuta in Ω , ed indicati con \mathbf{u}_A e \mathbf{u}_B gli spostamenti di tali punti, risulta:

$$\frac{\|\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A\|}{l_{AB}} \ll 1 \quad (2.109)$$

Prendendo A e B sufficientemente vicini da poter utilizzare la (2.94), si ha:

$$\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_A)(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \quad (2.110)$$

Se poi si pone:

$$\mathbf{x}_A = (x, y, z) \quad \mathbf{x}_B = (x + \Delta x, y, z) \quad (2.111)$$

si ha $l_{AB} = \Delta x$ ed inoltre

$$\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A = \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta x \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} \Delta x \right]^t \quad (2.112)$$

per cui si ha:

$$\frac{\|\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A\|}{l_{AB}} = \frac{\|\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A\|}{\Delta x} = \sqrt{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2} \ll 1 \quad (2.113)$$

che implica

$$\left| \frac{\partial u_x}{\partial x} \right| \ll 1 \quad \left| \frac{\partial u_y}{\partial x} \right| \ll 1 \quad \left| \frac{\partial u_z}{\partial x} \right| \ll 1 \quad (2.114)$$

Ragionando in modo analogo si mostra che se vale l'ipotesi di piccoli spostamenti allora anche le altre componenti del gradiente del campo di spostamenti devono essere piccole, ovvero deve aversi:

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (2.115)$$

¹¹ \mathbf{D} è simmetrico in quanto metà della somma del tensore simmetrico $\mathbf{F}^t \mathbf{F}$ e del tensore identico. La simmetria di $\mathbf{F}^t \mathbf{F}$ si ricava dalla relazione:

$$(\mathbf{F}^t \mathbf{F}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{F}^t \mathbf{F} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{a} \cdot \mathbf{F} \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}^t \mathbf{F} \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{F}^t \mathbf{F}) \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \quad (2.107)$$

2.2.7 Tensore della deformazione infinitesima

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti il termine quadratico diventa trascurabile rispetto a quello lineare nell'espressione del tensore della deformazione di Green. Pertanto si può porre:

$$\mathbf{D} \cong \mathbf{E} \quad (2.116)$$

dove il tensore simmetrico \mathbf{E} è detto 'tensore della deformazione infinitesima' ed è dato da:

$$\mathbf{E} = \text{sym } \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) \quad (2.117)$$

cioè rappresenta la parte simmetrica¹² del gradiente del campo di spostamenti.

Sempre nell'ipotesi di piccoli spostamenti si semplificano le espressioni della dilatazione lineare e dello scorrimento per le fibre elementari. Infatti dalla (2.80) si ottiene:

$$(1 + \varepsilon)^2 \cong 1 + 2 \mathbf{E} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \quad (2.119)$$

Essendo $2 \mathbf{E} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \ll 1$, anche nel primo termine risulta $\varepsilon \ll 1$. Elevando allora al quadrato ambo i membri:

$$1 + 2 \varepsilon + \varepsilon^2 \cong 1 + 2 \mathbf{E} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}, \quad (2.120)$$

ed osservando che il termine quadratico ε^2 è trascurabile rispetto a quello lineare 2ε , si può porre:

$$\varepsilon(\mathbf{e}) = \mathbf{E} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \quad (2.121)$$

Analogamente, per l'espressione (2.86) nell'ipotesi di piccoli spostamenti si ricava che $1 + \varepsilon_a \cong 1 + \varepsilon_b \cong 1$ da cui:

$$\text{sen } \gamma_{ab} \cong 2 \mathbf{E} \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b \quad (2.122)$$

Essendo il primo termine molto piccolo risulta $\text{sen } \gamma_{ab} \cong \gamma_{ab}$ e dunque si può porre:

$$\gamma_{ab} = 2 \mathbf{E} \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b \quad (2.123)$$

Rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ il tensore \mathbf{E} è rappresentabile attraverso una matrice la cui componente E_{ij} è data da¹³:

$$E_{ij} = \mathbf{E} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.129)$$

¹²Un tensore \mathbf{A} è decomponibile in un unico modo nella somma della sua parte simmetrica $\text{sym } \mathbf{A}$ e della sua parte emisimmetrica $\text{emi } \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \text{sym } \mathbf{A} + \text{emi } \mathbf{A} \quad \text{con:} \quad \text{sym } \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t) \quad \text{emi } \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^t) \quad (2.118)$$

¹³Si ricorda che la componente A_{ij} di un tensore \mathbf{A} rispetto ad una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è data da:

$$A_{ij} = \mathbf{A} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.124)$$

Infatti un tensore \mathbf{A} è un operatore lineare che al generico vettore \mathbf{u} lega il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u}$. Dette v_k e u_j le componenti di \mathbf{v} e \mathbf{u} , con $k, j = 1, 2, 3$, si ha:

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{e}_k = \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{A} (u_j \mathbf{e}_j) = u_j (\mathbf{A} \mathbf{e}_j) \quad (2.125)$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned}
 i = 1 \quad j = 1 & \quad E_{11} = \mathbf{E} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \varepsilon(\mathbf{e}_1) = \varepsilon_x \\
 i = 2 \quad j = 2 & \quad E_{22} = \mathbf{E} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \varepsilon(\mathbf{e}_2) = \varepsilon_y \\
 i = 3 \quad j = 3 & \quad E_{33} = \mathbf{E} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \varepsilon(\mathbf{e}_3) = \varepsilon_z \\
 i = 1 \quad j = 2 & \quad E_{12} = \mathbf{E} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\
 i = 1 \quad j = 3 & \quad E_{13} = \mathbf{E} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\
 i = 2 \quad j = 3 & \quad E_{23} = \mathbf{E} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{1}{2} \gamma_{yz}
 \end{aligned} \tag{2.130}$$

ed inoltre per la simmetria di \mathbf{E} :

$$E_{21} = E_{12} \quad E_{31} = E_{13} \quad E_{32} = E_{23} \tag{2.131}$$

Indicando per semplicità ancora con \mathbf{E} la matrice associata al tensore della deformazione infinitesima, detta anche ‘matrice della deformazione’, si ha dunque:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{2.132}$$

I termini della diagonale rappresentano le dilatazioni delle fibre parallele agli assi del riferimento mentre i termini ij fuori diagonale rappresentano gli scorrimenti tra le fibre parallele agli assi i e j .

Dalle (2.117) e (2.130) si ottengono le seguenti espressioni delle deformazioni e

Moltiplicando scalarmente ambo i membri per il versore \mathbf{e}_i si ottiene:

$$v_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = u_j (\mathbf{A} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) \tag{2.126}$$

Essendo la base ortonormale si ha che $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{ik}$, dove il cosiddetto ‘simbolo di Kronecker’ δ_{ik} è definito da:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases} \tag{2.127}$$

cioè rappresenta la componente ik della matrice identità. E’ facile allora verificare che $\delta_{ik} v_k = v_i$ per cui si ottiene:

$$v_i = (\mathbf{A} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) u_j = A_{ij} u_j \tag{2.128}$$

dove appunto A_{ij} rappresenta la componente ij della matrice associata al tensore \mathbf{A} rispetto alla base scelta.

Nel seguito per brevità di notazione si utilizzerà la stessa notazione \mathbf{A} per indicare sia il tensore che la matrice associata al tensore. E’ chiaro da quanto detto che la matrice dipende dalla base scelta.

degli scorrimenti caratterizzanti le fibre parallele agli assi del riferimento:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.133)$$

Per determinare l'espressione della dilatazione volumetrica nell'ipotesi di piccoli spostamenti conviene scrivere la (2.95) in componenti e sostituire nella (2.90):

$$\Theta = \det \mathbf{F} - 1 = \det(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) - 1 = \det \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} - 1 \quad (2.134)$$

Sviluppando il determinante si ottiene:

$$\Theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \epsilon \cong \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.135)$$

essendo il termine ϵ almeno quadratico nelle componenti di $\nabla \mathbf{u}$. Tenendo conto anche delle (2.133) si può quindi porre:

$$\Theta = \text{tr } \mathbf{E} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.136)$$

2.2.8 Sintesi dei risultati per il caso di piccoli spostamenti

In questa sezione si sintetizzano i risultati ottenuti nel caso di piccoli spostamenti fornendone alcune semplici interpretazioni. Ciò per consentire, a chi non abbia studiato le relative dimostrazioni, di conoscere e poter applicare tali risultati capendone nelle grandi linee il significato fisico. A tale scopo si ripetono sia l'enunciato dell'ipotesi di piccoli spostamenti sia alcune altre definizioni.

Si dice valida l'ipotesi di piccoli spostamenti se, dati due punti A e B di Ω , detta l_{AB} la lunghezza di una qualsiasi curva che li unisca e che sia tutta contenuta in Ω , ed indicati con \mathbf{u}_A e \mathbf{u}_B gli spostamenti di tali punti, risulta:

$$\frac{\|\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A\|}{l_{AB}} \ll 1 \quad (2.137)$$

Nello studio della deformazione in un punto $\mathbf{x}_o \in \Omega$, si introduce il concetto di 'intorno elementare' del punto. Tutti i risultati che si riportano di seguito si ottengono facendo riferimento alla deformazione delle fibre dell'intorno elementare e facendo tendere a zero il suo volume.

Per tale motivo tutte le grandezze che identificano la deformazione dell'intorno del punto, ovvero la dilatazione lineare di una fibra, lo scorrimento tra due fibre e la dilatazione volumetrica, vanno intesi come valori puntuali.

Nella figura 2.5 si illustra la deformazione dell'intorno elementare I_o di un punto \mathbf{x}_o , che trasforma tale intorno nell'intorno I_o^* del punto \mathbf{x}_o^* trasformato di \mathbf{x}_o .

Si definisce una 'fibra' dell'intorno elementare un segmento che unisce due punti dell'intorno (figura 2.9). Se si da un orientamento sulla fibra, la fibra si dice orientata ed è definita dal vettore che unisce il primo con il secondo punto.

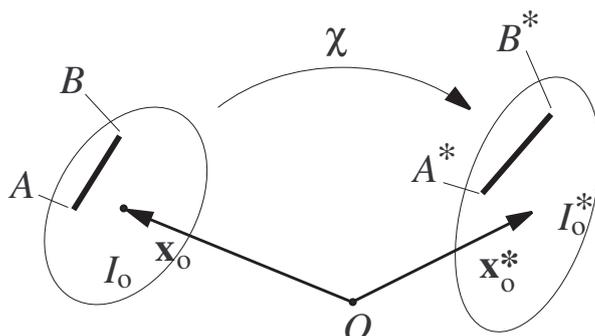


Figura 2.9: Fibra dell'intorno elementare: nell'esempio in figura la fibra che unisce i punti A e B nella configurazione indeformata si trasforma, in quella deformata, nella fibra che unisce i trasformati A^* e B^* dei punti A e B .

Si dimostra che dopo la deformazione, una fibra dell'intorno elementare I_o , si trasforma in un altro segmento (rettilineo), ovvero una fibra dell'intorno I_o^* .

Si definisce 'dilatazione lineare' di una fibra f di lunghezza iniziale l e lunghezza finale dopo la deformazione pari a l^* , e si indica con ε , il rapporto:

$$\varepsilon = \frac{l^* - l}{l} \quad (2.138)$$

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti le dilatazioni lineari delle fibre nelle direzioni parallele agli assi x , y e z sono chiamate rispettivamente ε_x , ε_y e ε_z e sono legate al campo degli spostamenti dalle relazioni:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.139)$$

Tali relazioni possono essere ricordate pensando al 'cubetto elementare di figura 2.10.a, di volta in volta, come un concio di una trave con asse in direzione x , y e z . In particolare, nel terzo caso la relazione che fornisce la deformazione assiale del concio sarebbe $\varepsilon_a = w'(z) = dw/dz$. Essendo nella notazione qui utilizzata $w = u_z$ ed $\varepsilon_a = \varepsilon_z$, e cambiando i simboli della derivata totale in quelli di derivata parziale, si ottiene $\varepsilon_z = \partial u_z / \partial z$, ovvero la terza delle relazioni (2.139).

Nelle figure 2.10.b-2.10.d sono riportate le configurazioni deformate del cubetto nei casi di sola dilatazione lineare in direzione x , in direzione y ed in direzione z , a meno di spostamenti rigidi aggiuntivi.

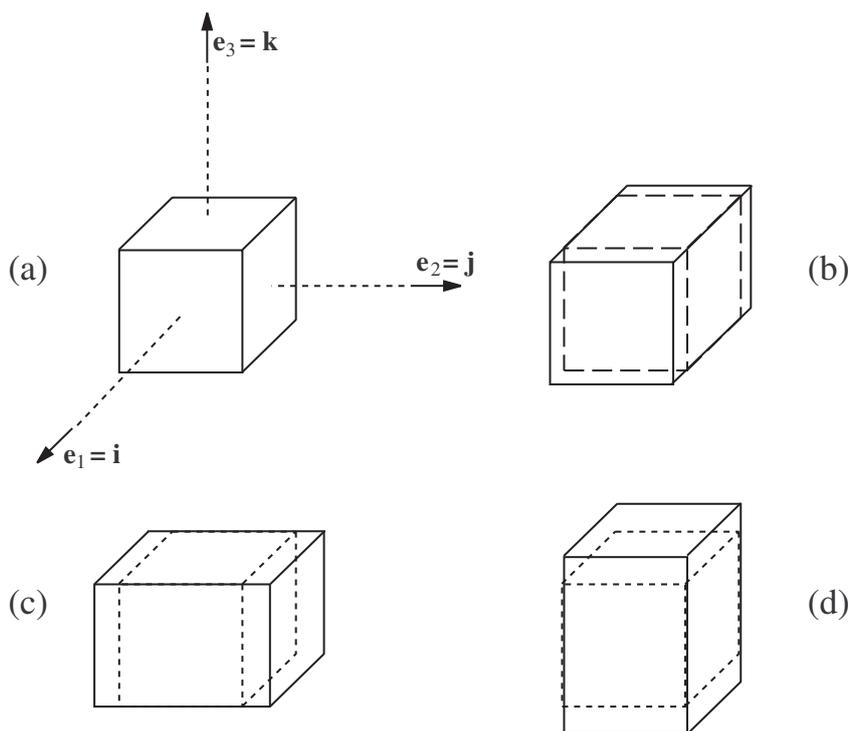


Figura 2.10: Deformazione del cubetto elementare: (a) cubetto indeformato; (b) sola dilatazione ε_x ; (c) sola dilatazione ε_y ; (d) sola dilatazione ε_z .

Date due fibre orientate f_a e f_b , ortogonali fra loro, si definisce ‘scorrimento’ γ_{ab} la diminuzione del minore degli angoli formati tra le fibre durante la deformazione, che inizialmente è uguale $\pi/2$. Si ha dunque (figura 2.11):

$$\gamma_{ab} = -(\alpha_{ab}^* - \alpha_{ab}) = \frac{\pi}{2} - \alpha_{ab}^* \quad (2.140)$$

Gli scorrimenti tra le fibre parallele e concordi agli assi x , y e z sono indicati con γ_{xy} , γ_{yz} e γ_{xz} . Dalla definizione di scorrimento si ottiene anche che $\gamma_{yx} = \gamma_{xy}$, $\gamma_{zy} = \gamma_{yz}$ e $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$.

Nell’ipotesi di piccoli spostamenti gli scorrimenti γ_{xy} , γ_{yz} e γ_{xz} sono legati al campo di spostamenti dalle relazioni:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{cases} \quad (2.141)$$

Nella figura 2.12 sono riportate le configurazioni deformate del cubetto elementare nei casi in cui solo uno degli scorrimenti delle relazioni (2.141) è non nullo mentre sono

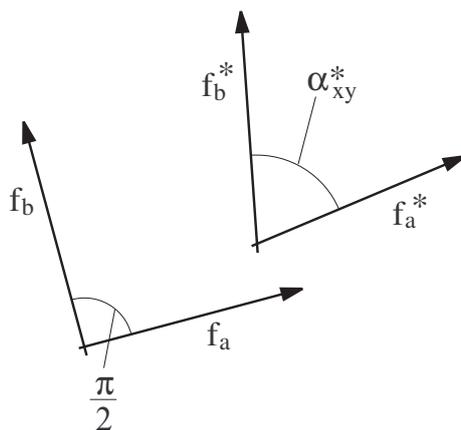


Figura 2.11: Definizione di scorrimento γ_{ab} .

nulle le dilatazioni ε_x , ε_y e ε_z , sempre nel caso di piccoli spostamenti ed a meno di spostamenti rigidi aggiuntivi.

In figura 2.13 si dà invece un'interpretazione geometrica della prima delle (2.141). Per le altre due l'interpretazione è analoga.

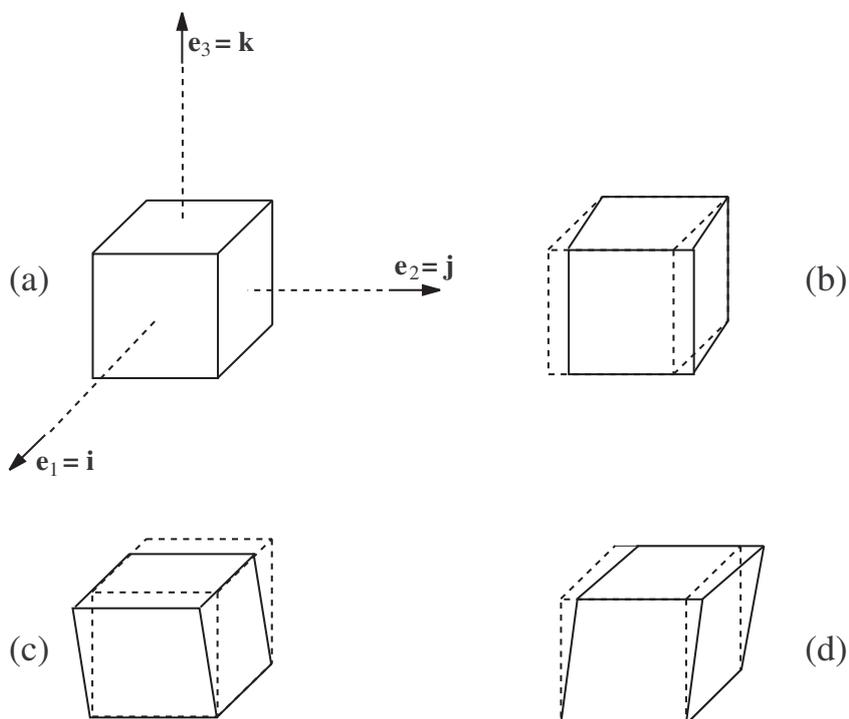


Figura 2.12: Deformazione del cubetto elementare in presenza di solo scorrimento: (a) cubetto indeformato; (b) solo scorrimento γ_{xy} ; (c) solo scorrimento γ_{xz} ; (d) solo scorrimento γ_{yz} .

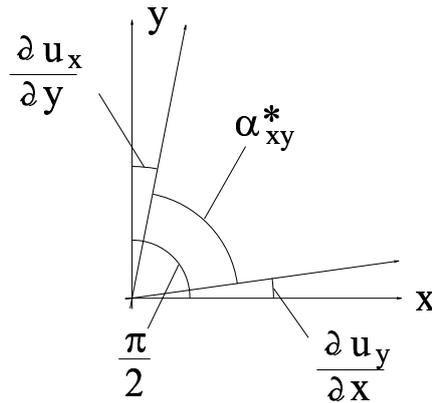


Figura 2.13: Interpretazione geometrica di γ_{xy} nell'ipotesi di piccoli spostamenti.

Il tensore della deformazione infinitesima \mathbf{E} è il tensore simmetrico la cui matrice associata ad una base ortonormale $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ è data da:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

Si dimostrano i due risultati:

- Assegnata una fibra dell'intorno elementare di direzione individuata dal versore \mathbf{a} , la dilatazione lineare di tale fibra è data da:

$$\varepsilon_a = \mathbf{E} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \quad (2.143)$$

- Assegnate due fibre orientate dell'intorno elementare di direzioni e versi individuati dai versori \mathbf{a} e \mathbf{b} , lo scorrimento tra tali fibre è dato da:

$$\gamma_{ab} = 2 \mathbf{E} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \mathbf{E} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (2.144)$$

È utile osservare che per una fibra parallela all'asse x , la cui direzione è dunque individuata dal versore $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$, la (2.143) fornisce effettivamente la dilatazione lineare ε_x . Si ha infatti:

$$\mathbf{E} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = E_{11} = \varepsilon_x \quad (2.145)$$

Analogamente si verifica che $\mathbf{E} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \varepsilon_y$ e che $\mathbf{E} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \varepsilon_z$. Quanto agli scorrimenti, date due fibre parallele e concordi rispettivamente agli assi x ed y , e quindi ai versori \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , si ha dalla (2.144):

$$\mathbf{E} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = E_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad (2.146)$$

ed analogamente si verifica che $\mathbf{E} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = E_{23} = \gamma_{yz}/2$ e $\mathbf{E} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = E_{13} = \gamma_{xz}/2$.

Detti ΔV_o il volume di un intorno I_o di un punto $\mathbf{x}_o \in \Omega$ e ΔV_o^* quello del suo trasformato I_o^* dopo la deformazione, si definisce ‘dilatazione volumetrica’, o ‘dilatazione cubica’, e si indica con Θ , il limite:

$$\Theta = \lim_{\Delta V_o \rightarrow 0} \frac{\Delta V_o^* - \Delta V_o}{\Delta V_o} \quad (2.147)$$

Dalla figura 2.12 si intuisce che in presenza solo di scorrimenti fra le fibre parallele agli assi si ha una variazione di volume nulla del cubetto. In particolare, si dimostra che nell’ipotesi di piccoli spostamenti si ha:

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.148)$$

2.2.9 Deformazioni principali e direzioni principali

Si definiscono ‘deformazioni principali’ gli autovalori del tensore della deformazione infinitesima \mathbf{E} e ‘direzioni principali’ quelle degli autovettori di \mathbf{E} . Come è noto dall’algebra un autovalore ε_p di \mathbf{E} ed il corrispondente autovettore \mathbf{e}_p sono soluzioni del seguente problema:

$$\mathbf{E}\mathbf{e}_p = \varepsilon_p \mathbf{e}_p \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{E} - \varepsilon_p \mathbf{I}) \mathbf{e}_p = \mathbf{0} \quad (2.149)$$

che ammette soluzioni diverse da quella banale se e solo se

$$\det(\mathbf{E} - \varepsilon_p \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_p & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_p & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_p \end{bmatrix} = 0 \quad (2.150)$$

cioè se e solo se ε_p è soluzione della cosiddetta ‘equazione caratteristica’:

$$-\varepsilon_p^3 + I_{\mathbf{E}} \varepsilon_p^2 + II_{\mathbf{E}} \varepsilon_p + III_{\mathbf{E}} = 0 \quad (2.151)$$

dove $I_{\mathbf{E}}$, $II_{\mathbf{E}}$ e $III_{\mathbf{E}}$ rappresentano degli invarianti¹⁴ rispettivamente lineare, quadratico e cubico del tensore della deformazione e sono dati da:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{E}} &= \text{tr } \mathbf{E} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ II_{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} [\text{tr} (\mathbf{E}^2) - (\text{tr } \mathbf{E})^2] \\ III_{\mathbf{E}} &= \det \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.152)$$

Le fibre elementari parallele ad una direzione principale sono caratterizzate da scorrimento nullo con qualsiasi altra fibra ad essa ortogonale. Infatti se il versore \mathbf{e}_{pa} definisce

¹⁴Un invariante di un tensore è un’espressione scalare funzione delle componenti della matrice associata al tensore che però è costante rispetto ad un qualsiasi cambiamento della base rispetto a cui la matrice si determina. In altre parole, se cambia la base rispetto a cui si rappresenta la matrice associata al tensore, cambiano le componenti della matrice ma non variano, ad esempio, la traccia ed il determinante della matrice stessa, che sono dunque funzioni scalari del tensore e non della matrice ad essa associata.

una direzione principale di autovalore corrispondente ε_{pa} , dato un qualsiasi versore \mathbf{e}_b ad esso ortogonale si ha:

$$\gamma_{ab} = 2 \mathbf{E} \mathbf{e}_{pa} \cdot \mathbf{e}_b = 2 \varepsilon_{pa} \mathbf{e}_{pa} \cdot \mathbf{e}_b = 0 \quad (2.153)$$

per l'ortogonalità tra \mathbf{e}_{pa} e \mathbf{e}_b .

Essendo \mathbf{E} simmetrico i suoi autovalori sono tutti reali. Calcolati gli autovalori risolvendo la (2.151) le corrispondenti direzioni principali si ottengono sostituendo nella (2.149) gli autovalori, uno per volta. Se essi sono tutti distinti, allora esiste una sola terna di direzioni principali individuata dai versori \mathbf{e}_{pi} , $i = 1, 2, 3$. Se due autovalori sono coincidenti, ovvero se l'equazione caratteristica ammette una radice di molteplicità 2, allora esiste un piano contenente tutte direzioni principali, la cui direzione ortogonale è anch'essa principale. Se gli autovalori sono tutti coincidenti allora tutte le direzioni sono principali.

In ogni caso esiste almeno una base ortonormale di direzioni principali $\{\mathbf{e}_{pi}\}$, $i = 1, 2, 3$. Rispetto a tale base la matrice associata al tensore della deformazione infinitesima è diagonale e contiene quali termini della diagonale principale le deformazioni principali. Rispetto alla base $\{\mathbf{e}_{pi}\}$ la matrice associata ad \mathbf{E} diventa quindi:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{p3} \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

Di particolare interesse risultano i casi in cui una o due deformazioni principali sono nulle. Nel primo caso si parla di 'stato di deformazione piano' mentre nel secondo si parla di 'stato di deformazione monoassiale'. Calcolando il determinante utilizzando la rappresentazione diagonale (2.154)

$$\det \mathbf{E} = \varepsilon_{p1} \varepsilon_{p2} \varepsilon_{p3} \quad (2.155)$$

si vede che lo stato di deformazione è piano o monoassiale se e solo se il determinante di \mathbf{E} è nullo.

2.3 Statica del modello continuo tridimensionale

In questa parte si affronterà lo studio dell'equilibrio di un corpo continuo tridimensionale, la cui cinematica è stato oggetto della sezione precedente. Si consideri allora un corpo continuo \mathcal{B} , la cui configurazione in un certo istante è definita dal dominio Ω , soggetto ad un sistema di forze esterne \mathcal{F} costituito da un campo vettoriale \mathbf{b} di forze di volume definito in Ω ed un campo vettoriale \mathbf{p} di forze superficiali definito sulla frontiera $\partial\Omega$ (figura 2.14).

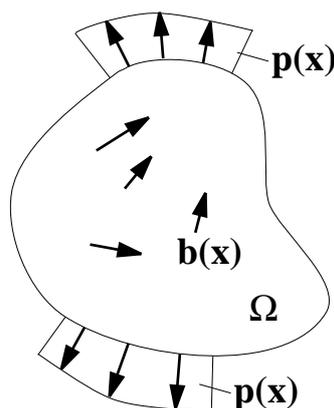


Figura 2.14: Forze esterne applicate su \mathcal{B} .

Così come fatto per le travi, la definizione di equilibrio viene data attraverso la scrittura delle 'equazioni cardinali della statica':

Definizione 2 Una corpo \mathcal{B} soggetto ad un sistema di forze \mathcal{F} si dice in equilibrio se la risultante di \mathcal{F} ed il momento risultante di \mathcal{F} rispetto ad un polo arbitrario sono nulli.

Scegliendo quale polo l'origine O dei vettori posizione \mathbf{x} che identificano ciascun punto di \mathcal{B} , tale definizione di equilibrio equivale alla scrittura delle due equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione intorno ad O :

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(\mathbf{x}) dS = \mathbf{0} \quad (2.156)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{p}(\mathbf{x}) dS = \mathbf{0}$$

L'analisi dello stato di sollecitazione all'interno del corpo \mathcal{B} si basa, così come per le travi, sul principio di sezionamento, che qui si enuncia di nuovo con riferimento al modello in esame.

Postulato 3 Un corpo \mathcal{B} è in equilibrio se e solo se ogni parte $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ è in equilibrio se soggetta al sistema di forze attive \mathcal{F}_a direttamente agente su \mathcal{B}' ed al sistema di forze reattive \mathcal{F}_r che il mondo esterno a \mathcal{B}' esplica su \mathcal{B}' . Il sistema \mathcal{F}_r è in generale a sua volta costituito dalla somma delle reazioni dei vincoli esterni direttamente applicati su \mathcal{B}' e delle reazioni interne che $\mathcal{B} - \mathcal{B}'$ esplica su \mathcal{B}' . ■

Si considera qui per semplicità il caso in cui il corpo è privo di vincoli esterni. Si seziona allora il corpo in due parti definite dai domini Ω_1 e Ω_2 aventi in comune la superficie S del sezionamento, che si suppone di tipo regolare in modo che il piano tangente sia definito in ogni suo punto (figura 2.15). La parte Ω_1 dovrà allora essere in equilibrio soggetta alle forze attive direttamente agenti su di essa ed alle forze che Ω_2 esercita su Ω_1 . Queste ultime rappresentano delle forze superficiali agenti sulla frontiera di Ω_1 .

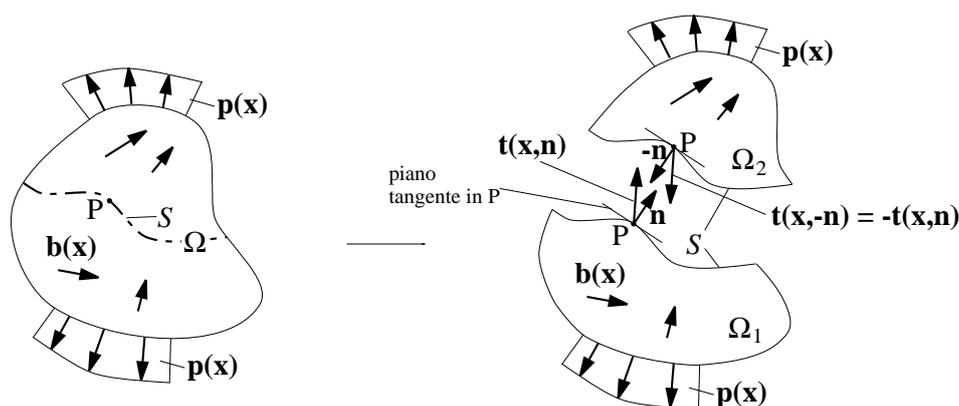


Figura 2.15: Sezionamento di Ω in Ω_1 e Ω_2 .

Preso un qualsiasi punto P di S , di posizione \mathbf{x} , dopo il sezionamento esso sarà sia un punto di $S \cap \Omega_1$ che un punto di $S \cap \Omega_2$. Detta \mathbf{n} la normale uscente da Ω_1 in P , la normale uscente da Ω_2 in P sarà $-\mathbf{n}$. L'analisi delle forze di interazione si basa sul seguente postulato, noto come 'postulato di Cauchy':

Postulato 4 La forza superficiale \mathbf{t} che Ω_2 esercita su Ω_1 in P dipende solo dalla posizione \mathbf{x} di P e dalla normale \mathbf{n} al piano tangente in P uscente da Ω_1 , cioè si ha:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (2.157)$$

■

Pertanto, per il postulato di Cauchy, sezionando in modo diverso Ω con due diverse superfici di sezionamento S_1 e S_2 contenenti però uno stesso punto P ed aventi in P lo stesso piano tangente (figura 2.16), le forze superficiali di interazione che le due parti si scambiano in P sono uguali.

La relazione (2.157) associa ad ogni punto P interno a Ω e ad ogni giacitura per P di normale \mathbf{n} un 'vettore tensione', $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$, che rappresenta la forza superficiale che il resto del corpo esercita su tale giacitura nell'intorno di P .

Il principio di azione e reazione implica che se $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ è la forza per unità di superficie che Ω_2 esercita su Ω_1 in P , la forza che Ω_1 esercita su Ω_2 in P , che per il postulato di Cauchy sarà uguale a $\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n})$, dovrà essere uguale in modulo ed opposta in verso a $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$. Pertanto si ha (figura 2.15):

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (2.158)$$

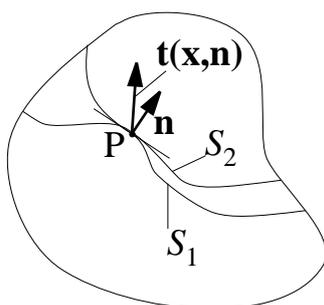


Figura 2.16: Due sezioni S_1 e S_2 di Ω entrambi contenenti il punto P ed aventi lo stesso piano tangente in P .

La relazione (2.158) è anche nota come ‘lemma di Cauchy’.

Per caratterizzare la funzione (2.157) si scelga una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Si estragga quindi da \mathcal{B} una sua parte $\bar{\mathcal{B}}$ avente la forma di un tetraedro $\bar{\Omega}$ con tre facce avente ciascuna quale normale uscente al tetraedro l’opposto di uno dei versori della base, e con la quarta faccia avente una normale \mathbf{m} caratterizzata per semplicità da tutti e tre i coseni direttori positivi (figura 2.17). Sia inoltre \mathbf{x}_o la posizione del vertice opposto alla faccia di normale \mathbf{m} e ε l’altezza relativa a tale faccia. Si osserva che sia l’area delle facce del tetraedro che il volume di questo dipendono da ε e tendono a zero al tendere a zero di ε .

Si fanno le ipotesi che sia le forze di volume \mathbf{b} che la funzione \mathbf{t} siano continue sul tetraedro.

Detta A_m l’area della faccia di normale \mathbf{m} e A_i le aree delle facce di normale $-\mathbf{e}_i$, risulta

$$A_i = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_i) A_m \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.159)$$

Per dimostrare ciò si osserva che, poiché per definizione l’ i -esimo vettore della base non dipende dalla posizione \mathbf{x} , si ha $\text{div } \mathbf{e}_i = 0$. Applicando allora il teorema della divergenza al flusso uscente del vettore \mathbf{e}_i dal tetraedro, si ha:

$$0 = \text{div } \mathbf{e}_i = \int_{\bar{\Omega}} \text{div } \mathbf{e}_i \, d\Omega = \int_{\partial\bar{\Omega}} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} \, dS = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{m} \int_{A_m} dS - \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \int_{A_j} dS \quad (2.160)$$

Poiché $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ si ha:

$$\sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \int_{A_j} dS = \delta_{ij} A_j = A_i \quad (2.161)$$

e quindi:

$$0 = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{m}) A_m - A_i \quad (2.162)$$

da cui la (2.159).

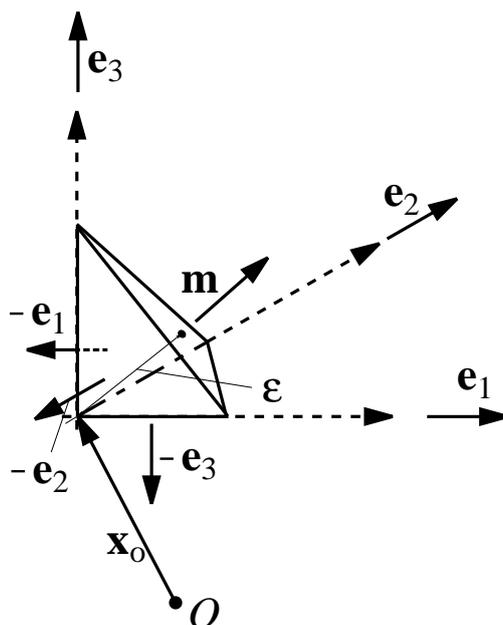


Figura 2.17: Tetraedro di Cauchy.

Per il principio di sezionamento, affinché il corpo sia in equilibrio anche il tetraedro estratto dal corpo deve esserlo sotto l'azione delle forze di volume direttamente applicate sul tetraedro e le tensioni interne agenti sulle facce del tetraedro. In particolare, l'equilibrio alla traslazione del tetraedro impone che sia verificata la seguente equazione:

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\partial\bar{\Omega}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \, dS = \mathbf{0} \quad (2.163)$$

Separando i termini dell'integrale esteso a $\partial\bar{\Omega}$ relativi alle quattro facce del tetraedro, dividendo per A_m ed imponendo che la (2.160) valga per ogni valore di ε , al limite per ε tendente a zero deve risultare:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{A_m} \left(\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{A_m} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) \, dS + \sum_{i=1}^3 \int_{A_i} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i) \, dS \right) \right] = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{A_m} \left(\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{A_m} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) \, dS - \sum_{i=1}^3 \int_{A_i} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \, dS \right) \right] = \quad (2.164) \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{A_m} \left(\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) \frac{A_m \varepsilon}{3} + \mathbf{t}(\boldsymbol{\xi}_m, \mathbf{m}) A_m - \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\boldsymbol{\xi}_i, \mathbf{e}_i) A_i \right) \right] = \mathbf{0} \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il lemma di Cauchy, per cui si ha $\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$, ed il teorema della media. In particolare, per la continuità di \mathbf{b} il teorema della media assicura

che esiste un punto ξ interno al tetraedro tale che l'integrale di \mathbf{b} esteso a $\overline{\Omega}$ è uguale a $\mathbf{b}(\xi)$ per il volume del tetraedro, pari ad $A_m \varepsilon/3$. Analogamente, per la continuità di \mathbf{t} esiste un punto ξ_m sulla faccia di normale \mathbf{m} tale che l'integrale di $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{m})$ su A_m è pari a $\mathbf{t}(\xi_m, \mathbf{m}) A_m$ ed esistono tre punti ξ_i sulle facce di normale $-\mathbf{e}_i$ per cui l'integrale di $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$ su A_i è pari a $\mathbf{t}(\xi_i, \mathbf{e}_i) A_i$, con $i = 1, 2, 3$.

I punti ξ , ξ_m e ξ_i dipendono da ε e, sempre per la continuità di \mathbf{b} e \mathbf{t} , al tendere a 0 di ε essi tendono a \mathbf{x}_o :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi_i = \mathbf{x}_o \quad (2.165)$$

Si riconosce nella (2.164) che l'integrale delle forze di volume è un infinitesimo di ordine superiore a quelli delle forze di superficie e dunque al limite si annulla. Utilizzando poi le relazioni (2.159) e (2.165) si ottiene al limite:

$$\frac{1}{A_m} \left(\mathbf{t}(\mathbf{x}_o, \mathbf{m}) A_m - \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{x}_o, \mathbf{e}_i) (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_i) A_m \right) = 0 \quad (2.166)$$

e, semplificando A_m :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}_o, \mathbf{m}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{x}_o, \mathbf{e}_i) (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_i) = \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{x}_o, \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i \right] \mathbf{m} \quad (2.167)$$

dove si è utilizzata la definizione di prodotto tensoriale.

La relazione (2.167) è proprio l'espressione cercata. Estendendo infatti tale risultato ad ogni punto \mathbf{x} di continuità di \mathbf{b} e \mathbf{t} e ad ogni giacitura per \mathbf{x} di normale \mathbf{n} , si ottiene

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i \right] \mathbf{n} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad (2.168)$$

Il tensore $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ è detto 'tensore delle tensioni' in \mathbf{x} . Dalla (2.168) si vede che esso è somma dei tre tensori $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i$, per $i = 1, 2, 3$. Per $i = 1$, $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)$ è il vettore tensione agente sulla faccia di normale $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, ovvero la faccia di normale x . In componenti rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

La componente σ_x è quella secondo x del vettore tensione agente sulla faccia di normale x , ed è dunque una componente 'normale'; le componenti τ_{xy} e τ_{xz} sono quelle secondo y e z del vettore tensione agente sulla faccia di normale x , e sono dunque componenti 'tangenziali'.

Analogamente, si ha:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.171)$$

Pertanto la matrice associata al tensore $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ in tale base è:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

ed è anche detta ‘matrice delle tensioni’.

Si consideri un cubetto elementare con le facce normali ai versori della base, dove a meno di infinitesimi il valore di \mathbf{T} si può assumere costante e pari al valore assunto al centro del cubetto. In figura 2.18 sono rappresentate le componenti normali e tangenziali agenti sulle facce di normali \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 del cubetto, ovvero le componenti del tensore delle tensioni rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

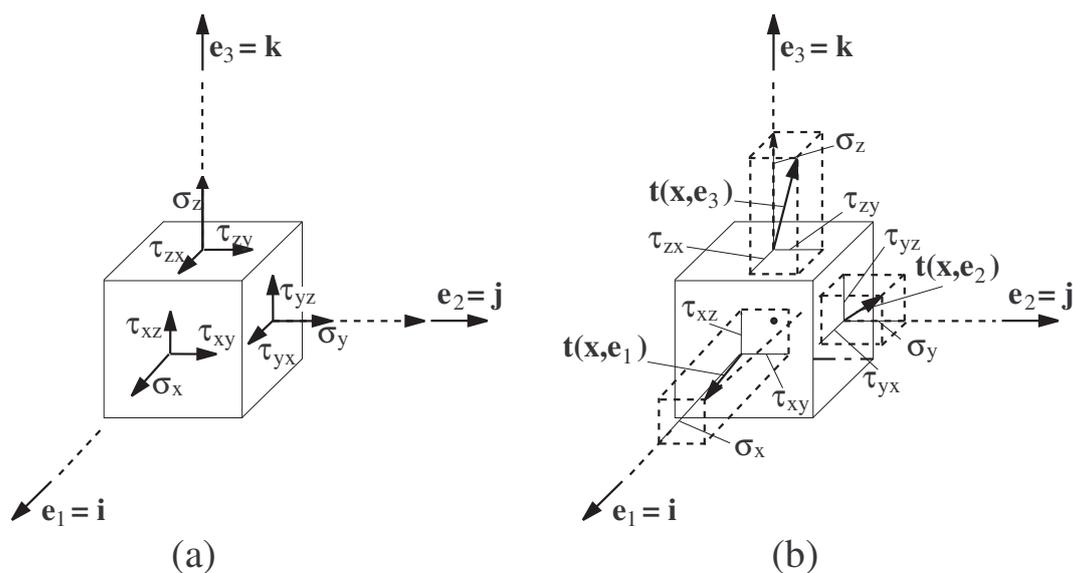


Figura 2.18: Visualizzazione delle tensioni agenti sulle facce di un cubetto elementare: (a) visualizzazione solo delle componenti; (b) visualizzazione anche delle risultanti su ciascuna faccia.

2.3.1 Equazioni differenziali di equilibrio

Si consideri un corpo qualsiasi $\bar{\mathcal{B}}$, che occupa il dominio $\bar{\Omega}$, estratto dall'interno del corpo \mathcal{B} . Si fa l'ipotesi di continuità di \mathbf{b} e di \mathbf{t} in Ω per cui si può utilizzare la (2.168).

L'equilibrio alla traslazione di \bar{B} fornisce:

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\partial\bar{\Omega}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \, dS = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\partial\bar{\Omega}} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \, dS = \mathbf{0} \quad (2.173)$$

Utilizzando il teorema della divergenza¹⁵ si ha:

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\partial\bar{\Omega}} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \, dS = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\bar{\Omega}} \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (2.177)$$

ovvero:

$$\int_{\bar{\Omega}} [\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x})] \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (2.178)$$

Dovendo quest'ultima relazione essere valida per ogni dominio $\bar{\Omega}$ estratto da Ω , si vede facilmente che l'integrando deve essere nullo e che quindi deve aversi, identicamente:

$$\mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (2.179)$$

La (2.178) è un'equazione differenziale vettoriale corrispondente a tre equazioni scalari. Esse sono le 'equazioni differenziali di equilibrio' e si scrivono rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\begin{aligned} b_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ b_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ b_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.180)$$

Per avere un ulteriore riscontro fisico del significato delle (2.180) si sono riportate nella figura 2.19 le componenti della tensione in direzione x agenti sulle varie facce del cubetto elementare di lati dx , dy e dz . Si è anche riportata, in grigio, la risultante delle forze di volume in direzione x , pari al prodotto di b_x per il volume del cubetto $dx \, dy \, dz$. Il tutto è a meno di infinitesimi di ordine superiore al volume del cubetto.

¹⁵Si ricorda che la divergenza di un campo tensoriale \mathbf{S} è un campo vettoriale, indicato con $\operatorname{div} \mathbf{S}$, definito dalla seguente uguaglianza:

$$[\operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{c} \stackrel{def.}{=} \operatorname{div} [\mathbf{S}^t(\mathbf{x}) \mathbf{c}] \quad \forall \mathbf{c} \text{ costante} \quad (2.174)$$

In componenti rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ si ha:

$$[\operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{x})]_i \cdot c_i = (S_{ij} c_i)_{/j} = S_{ij/j} c_i \quad (2.175)$$

da cui:

$$[\operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{x})]_i = S_{ij/j} \quad (2.176)$$

Le due facce ortogonali all'asse x hanno area pari a $dy dz$. Su quella di normale discorde a x agisce in direzione discorde a x la tensione σ_x , mentre su quella di normale concorde a x agisce in direzione concorde a x la tensione $\sigma_x + \partial\sigma_x/\partial x dx$. Tali tensioni vanno dunque moltiplicate, con il loro opportuno segno, per $dy dz$ per avere le rispettive risultanti in direzione x .

Le due facce ortogonali all'asse y hanno area pari a $dx dz$. Su quella di normale discorde a y agisce in direzione discorde a x la tensione τ_{xy} , mentre su quella di normale concorde a y agisce in direzione concorde a x la tensione $\tau_{xy} + \partial\tau_{xy}/\partial y dy$. Tali tensioni vanno dunque moltiplicate, con il loro opportuno segno, per $dx dz$ per avere le rispettive risultanti in direzione x .

Le due facce ortogonali all'asse z hanno area pari a $dx dy$. Su quella di normale discorde a z agisce in direzione discorde a x la tensione τ_{xz} , mentre su quella di normale concorde a z agisce in direzione concorde a x la tensione $\tau_{xz} + \partial\tau_{xz}/\partial z dz$. Tali tensioni vanno dunque moltiplicate, con il loro opportuno segno, per $dx dy$ per avere le rispettive risultanti in direzione x .

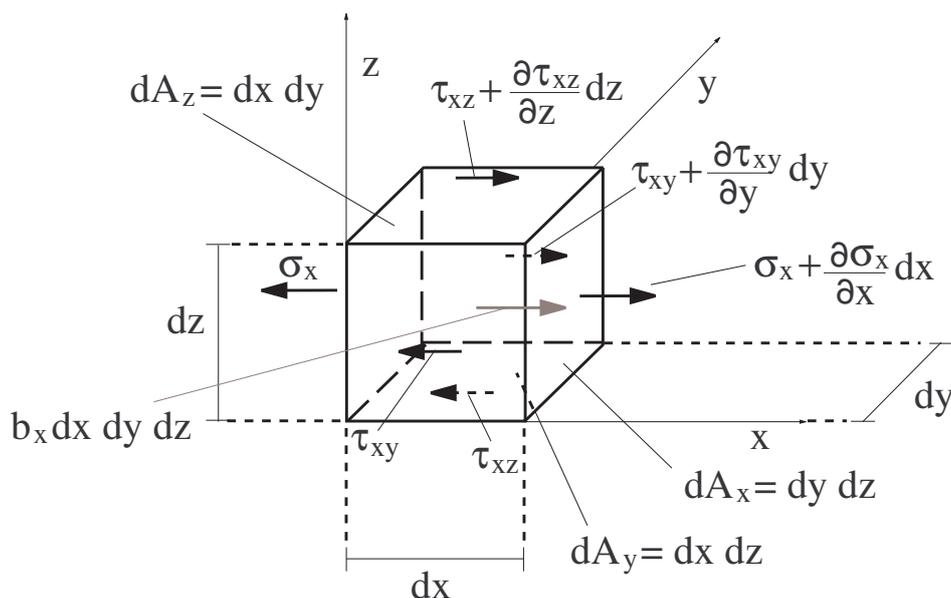


Figura 2.19: Equilibrio alla traslazione in direzione x del cubetto elementare.

In definitiva, l'equilibrio alla traslazione del cubetto elementare si impone uguagliando

do a zero la somma tutte le risultanti in direzione x :

$$\begin{aligned}
 & b_x dx dy dz + \\
 & + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) dy dz \\
 & + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy - \tau_{xy} \right) dx dz \\
 & + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz - \tau_{xz} \right) dx dy = 0
 \end{aligned} \tag{2.181}$$

Dividendo per il volume $dx dy dz$ si ricava la prima delle (2.180). Le altre due equazioni si ottengono imponendo in modo analogo l'equilibrio alla traslazione rispettivamente in direzione y e z .

2.3.2 Simmetria del tensore delle tensioni

Analogamente a quanto si è fatto nella sezione precedente partendo dalla condizione di equilibrio alla traslazione, imponendo il soddisfacimento dell'equilibrio alla rotazione rispetto ad un polo qualsiasi per un qualsiasi corpo $\bar{\mathcal{B}}$ estratto dall'interno di \mathcal{B} si può dimostrare che il tensore delle tensioni, in ogni punto, è simmetrico, ovvero che si ha:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^t \tag{2.182}$$

Rispetto ad una qualsiasi base ortonormale la condizione di simmetria del tensore delle tensioni equivale a quella di simmetria della matrice delle tensioni ad esso associata. Pertanto, per la condizione di simmetria deve aversi:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \tag{2.183}$$

Per brevità non si dimostrerà la (2.182) ma per maggiore chiarezza ci si limiterà a verificare la validità delle (2.183) nel caso particolare di uno stato tensionale costante definito da un tensore \mathbf{T} in cui le uniche componenti non nulle rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sono τ_{xy} e τ_{yx} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.184}$$

In figura 2.20 è disegnato un cubetto visto in prospettiva dalla parte della faccia di normale z . Le risultanti della tensione tangenziale sulle facce di normali x e $-x$, di area pari a $\Delta y \Delta z$, formano una coppia di braccio Δx che fornisce un momento antiorario pari a $(\tau_{xy} \Delta y \Delta z) \Delta x$. Le risultanti della tensione tangenziale sulle facce di normali y e $-y$, di area pari a $\Delta x \Delta z$, formano una coppia di braccio Δy che fornisce un momento orario pari a $(\tau_{yx} \Delta x \Delta z) \Delta y$. Per l'equilibrio alla rotazione del cubetto tali due momenti devono essere uguali e si ottiene:

$$(\tau_{xy} \Delta y \Delta z) \Delta x = (\tau_{yx} \Delta x \Delta z) \Delta y \tag{2.185}$$

e cioè deve aversi $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

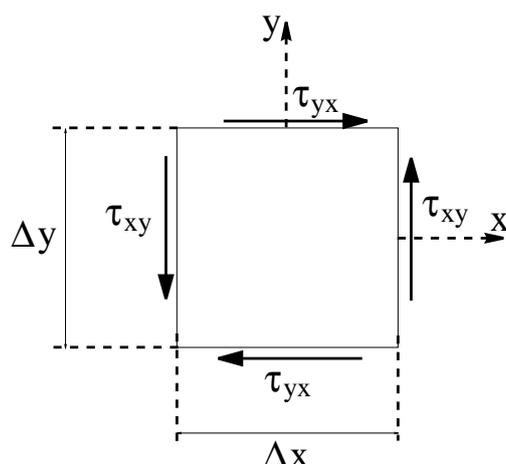


Figura 2.20: Verifica della simmetria di \mathbf{T} in un caso particolare.

2.3.3 Condizioni ai limiti

In ogni punto della frontiera di Ω si è detto che agiscono per ipotesi delle forze per unità di superficie che sono state indicate con \mathbf{p} . In particolare in un punto \mathbf{x} di $\partial\Omega$ in cui tale forza superficiale è nulla si ha $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Prolungando per continuità la relazione (2.168) in un punto della frontiera di Ω di normale uscente \mathbf{n} si ottiene allora:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (2.186)$$

La (2.186) rappresenta le condizioni ai limiti, dette anche condizioni al contorno, che devono essere soddisfatte dal campo tensoriale \mathbf{T} per il soddisfacimento dell'equilibrio. Esse, insieme alle equazioni differenziali ricavate nella sezione precedente, definiscono per il modello continuo tridimensionale il problema dell'equilibrio.

E' utile osservare che la relazione (2.186) può interpretarsi immaginando il piano tangente alla frontiera nel punto \mathbf{x} , di normale \mathbf{n} , come una giacitura passante per \mathbf{x} (risultato di un ipotetico sezionamento) e dunque la forza superficiale applicata $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ come il vettore tensione agente su tale giacitura. Tale interpretazione è analoga a quella per cui, nella modellazione monodimensionale delle travature, forze e coppie esterne applicate sull'estremo libero di una trave forniscono direttamente le caratteristiche della sollecitazione nel punto.

2.3.4 Componenti normale e tangenziali del vettore tensione su una giacitura

Si consideri un punto P di \mathcal{B} di posizione \mathbf{x} ed una giacitura per P di normale \mathbf{n} . La componente normale del vettore tensione $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n}$ è data da (figura 2.21):

$$\sigma_n = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad (2.187)$$

Dato un versore \mathbf{m} ortogonale a \mathbf{n} , la componente di $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ nella direzione di \mathbf{m} è chiaramente una componente tangenziale e verrà indicata con τ_{nm} . Essa è fornita da (figura 2.21):

$$\tau_{nm} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \quad (2.188)$$

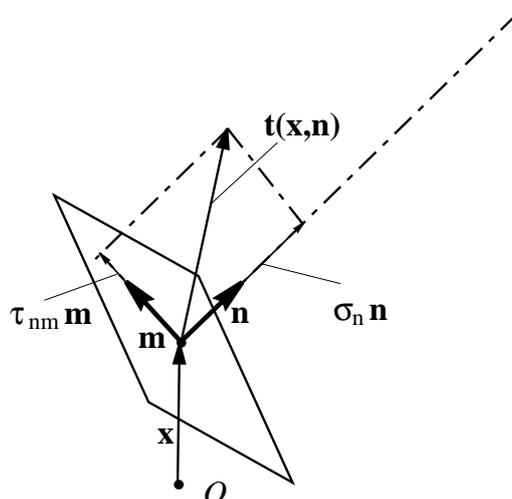


Figura 2.21: Componenti normale e tangenziale del vettore tensione.

Considerando poi la giacitura di normale \mathbf{m} , la componente tangenziale secondo \mathbf{n} del vettore tensione $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{m})$ si indicherà con τ_{mn} . Per la simmetria di \mathbf{T} risulta:

$$\tau_{mn} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n} = \tau_{nm} \quad (2.189)$$

2.3.5 Tensioni principali e direzioni principali di tensione

Si definiscono ‘tensioni principali’ in un punto \mathbf{x} gli autovalori del tensore della tensione $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ e ‘direzioni principali di tensione’ quelle dei corrispondenti autovettori.

Il calcolo delle tensioni principali e delle direzioni principali di tensione è perfettamente analogo alla determinazione delle deformazioni principali e delle direzioni principali di deformazione. Dunque un autovalore σ_p di \mathbf{T} ed il corrispondente autovettore \mathbf{e}_p sono soluzioni del seguente problema:

$$\mathbf{T} \mathbf{e}_p = \sigma_p \mathbf{e}_p \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{T} - \sigma_p \mathbf{I}) \mathbf{e}_p = \mathbf{0} \quad (2.190)$$

che ammette soluzioni diverse da quella banale se e solo se

$$\det(\mathbf{T} - \sigma_p \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_p \end{bmatrix} = 0 \quad (2.191)$$

cioè se e solo se σ_p è soluzione della cosiddetta ‘equazione caratteristica’:

$$-\sigma_p^3 + I_{\mathbf{T}} \sigma_p^2 + II_{\mathbf{T}} \sigma_p + III_{\mathbf{T}} = 0 \quad (2.192)$$

dove $I_{\mathbf{T}}$, $II_{\mathbf{T}}$ e $III_{\mathbf{T}}$ rappresentano gli invarianti rispettivamente lineare, quadratico e cubico del tensore della tensione e sono dati da:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{T}} &= \text{tr } \mathbf{T} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ II_{\mathbf{T}} &= \frac{1}{2} [\text{tr} (\mathbf{T}^2) - (\text{tr } \mathbf{T})^2] \\ III_{\mathbf{T}} &= \det \mathbf{T} \end{aligned} \quad (2.193)$$

Se il versore \mathbf{e}_p individua una direzione principale, la giacitura di normale \mathbf{e}_p è caratterizzata da un vettore tensione parallelo a \mathbf{e}_p , che quindi non ha componenti tangenziali. La componente normale σ_n è invece pari proprio alla tensione principale σ_p associata ad \mathbf{e}_p .

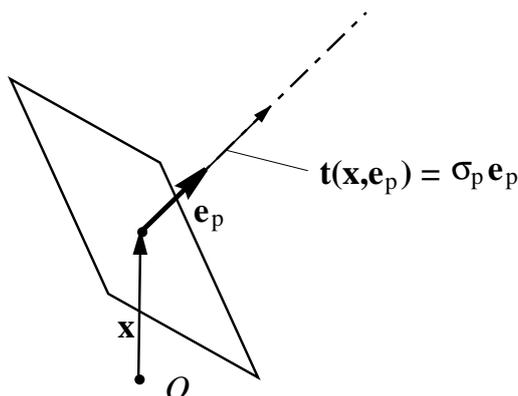


Figura 2.22: Se \mathbf{e}_p è direzione principale di tensione il vettore tensione è parallelo a \mathbf{e}_p .

Essendo \mathbf{T} simmetrico i suoi autovalori sono tutti reali. Calcolati gli autovalori risolvendo la (2.192) le corrispondenti direzioni principali si ottengono sostituendo nella (2.190) gli autovalori, uno per volta. Se essi sono tutti distinti, allora esiste una sola terna di direzioni principali di tensione individuata dai versori \mathbf{e}_{pi} , $i = 1, 3$. Se due autovalori sono coincidenti, ovvero se l'equazione caratteristica ammette una radice di molteplicità 2, allora esiste un piano contenente tutte direzioni principali di tensione, la cui direzione ortogonale è anch'essa principale. Se gli autovalori sono tutti coincidenti allora tutte le direzioni sono principali di tensione.

In ogni caso esiste almeno una base ortonormale di direzioni principali $\{\mathbf{e}_{pi}\}$, $i = 1, 2, 3$. Rispetto a tale base la matrice associata al tensore della tensione è diagonale e contiene quali termini della diagonale principale le tensioni principali. Rispetto alla

base $\{\mathbf{e}_{pi}\}$ la matrice associata a \mathbf{T} diventa quindi:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{p3} \end{bmatrix} \quad (2.194)$$

Nel caso in cui una tensione principale è nulla si parla di ‘stato tensionale piano’ mentre se due tensioni principali sono nulle si parla di ‘stato tensionale monoassiale’. Calcolando il determinante utilizzando la rappresentazione diagonale (2.194)

$$\det \mathbf{T} = \sigma_{p1} \sigma_{p2} \sigma_{p3} \quad (2.195)$$

si vede che lo stato tensionale è piano o monoassiale se e solo se il determinante di \mathbf{T} è nullo.

2.4 Cerchi di Mohr

Si consideri uno stato tensionale in un punto P definito da un tensore \mathbf{T} la cui matrice associata alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ è la seguente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

Per semplicità di notazione si ometterà nel seguito di questa sezione la dipendenza dal vettore posizione \mathbf{x} .

Essendo nulle le componenti tangenziali τ_{xz} e τ_{yz} si deduce che z è direzione principale ed il suo versore si indicherà con \mathbf{e}_{p3} . La corrispondente tensione principale si indicherà con σ_3 ed è proprio pari a σ_z . A tale risultato si perviene anche scrivendo l'equazione caratteristica:

$$\det(\mathbf{T} - \sigma_p \mathbf{I}) = (\sigma_z - \sigma_p) [(\sigma_x - \sigma_p)(\sigma_y - \sigma_p) - \tau_{xy}^2] \quad (2.197)$$

che ammette chiaramente σ_z quale una delle sue radici, corrispondente alla direzione principale z .

Si consideri ora una normale \mathbf{n} contenuta nel piano x, y , avente coseni direttori n_x, n_y e 0. Il corrispondente vettore tensione $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T} \mathbf{n}$ è allora contenuto ancora nel piano x, y , come si deduce calcolandone la sua rappresentazione nella base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.198)$$

Di seguito si ricava una rappresentazione grafica, molto usata nelle applicazioni, che mostra come varia il vettore \mathbf{t} nel piano x, y , al variare di \mathbf{n} nel piano stesso. A tale scopo conviene considerare le restrizioni dei vettori e dei tensori al piano x, y . Detto α l'angolo formato da \mathbf{n} con l'asse x , assunto positivo se antiorario visto dalla parte positiva dell'asse z (figura 2.23), si avrà nel piano x, y e rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\alpha) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2.199)$$

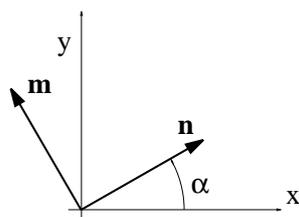


Figura 2.23: \mathbf{n} nel piano x, y è univocamente definita dall'angolo α formato con l'asse x .

Essendo ora:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (2.200)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\alpha) &= \begin{bmatrix} t_x(\alpha) \\ t_y(\alpha) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ \tau_{xy} \cos \alpha - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin \alpha \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} + \mathbf{R}(-\alpha) \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{s} + \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.201)$$

e quindi:

$$\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{s} + \mathbf{d} \quad (2.202)$$

dove:

$$\mathbf{s} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \mathbf{R}(-\alpha) \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.203)$$

ed inoltre:

$$\mathbf{R}(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.204)$$

Entrambi i vettori \mathbf{s} e \mathbf{d} hanno modulo costante:

$$\|\mathbf{s}\| = \left| \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right| \quad \|\mathbf{d}\| = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.205)$$

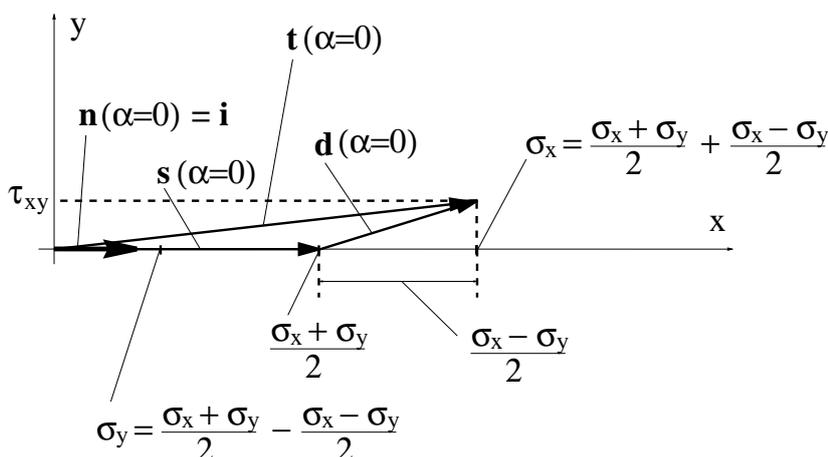


Figura 2.24: Decomposizione di \mathbf{t} in $\mathbf{t} = \mathbf{s} + \mathbf{d}$ per $\alpha = 0$.

Il vettore \mathbf{s} è sempre parallelo a \mathbf{n} . Quanto al vettore \mathbf{d} , poiché la matrice $\mathbf{R}(-\alpha)$ è quella associata ad al tensore che ruota un vettore generico del piano di un angolo α in senso orario se α è positivo¹⁶, $\mathbf{d}(\alpha)$ si ottiene ruotando di tale angolo il vettore $\mathbf{d}(\alpha = 0)$, cioè il vettore avente componenti $(\sigma_x - \sigma_y)/2$ rispetto a x e τ_{xy} rispetto a y .

¹⁶Si consideri ad esempio il vettore $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si ha:

$$\mathbf{R}(-\alpha) \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2.206)$$

che, rispetto sempre alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, definisce il vettore ottenuto da \mathbf{i} mediante una rotazione di α in senso orario se α è positivo.

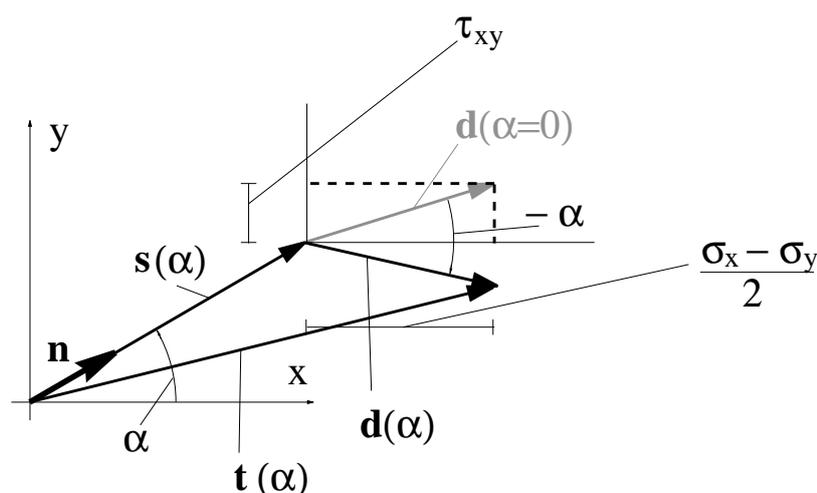


Figura 2.25: Decomposizione di \mathbf{t} in $\mathbf{t} = \mathbf{s} + \mathbf{d}$ per $\alpha \neq 0$.

Nelle figure 2.24 e 2.25 sono rappresentate la decomposizione (2.202) per $\alpha = 0$ e per $\alpha \neq 0$. In particolare, nel passaggio dalla figura 2.24 alla figura 2.25 i vettori \mathbf{n} e \mathbf{s} sono ruotati di α in senso antiorario mentre \mathbf{d} è ruotato di α in senso orario. Inoltre, è bene sottolineare per quanto si dirà dopo, nelle figure 2.24 e 2.25 gli assi x e y sono sempre quelli orizzontale e verticale, ovvero non sono ruotati.

Si consideri ora una nuova base definita da \mathbf{n} e dal versore \mathbf{m} ottenuto ruotando \mathbf{n} di $\pi/2$ in senso antiorario (figura 2.23). Rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ si ha:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.207)$$

Ruotando \mathbf{n} di α in senso antiorario, un osservatore solidale con la base $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\}$ vedrebbe \mathbf{n} e \mathbf{s} immobili, gli assi x e y ruotare di α in senso orario e \mathbf{d} ruotare di 2α in senso orario. Per verificare ciò, si indichi con $\mathbf{t}'(\alpha)$ il vettore numerico associato a $\mathbf{t}(\alpha)$ nella base $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\}$. La sua prima componente è la componente normale di \mathbf{t} cioè σ_n mentre la seconda componente è evidentemente la componente tangenziale τ_{nm} . La matrice di passaggio dalle componenti rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ a quelle rispetto alla base $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\}$ è:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{R}(-\alpha) \quad (2.208)$$

cioè è proprio la matrice $\mathbf{R}(-\alpha)$ ritrovata in precedenza. Risulta allora:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}'(\alpha) &= \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nm} \end{bmatrix} = \mathbf{R}(-\alpha) \begin{bmatrix} t_x(\alpha) \\ t_y(\alpha) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \mathbf{R}(-\alpha) \mathbf{R}(-\alpha) \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \\
 &= \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}(-\alpha) \mathbf{R}(-\alpha) \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.209}$$

Poiché si ha:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(-\alpha) \mathbf{R}(-\alpha) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{bmatrix} = \mathbf{R}(-2\alpha)
 \end{aligned} \tag{2.210}$$

dove con $\mathbf{R}(-2\alpha)$ si è indicata la matrice associata ad un tensore che ruota un vettore di 2α in senso orario se α è positivo, si ottiene in definitiva:

$$\mathbf{t}'(\alpha) = \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nm} \end{bmatrix} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}(-2\alpha) \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{s}' + \mathbf{d}'(\alpha) \tag{2.211}$$

dove

$$\mathbf{s}' = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}'(\alpha) = \mathbf{R}(-2\alpha) \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.212}$$

La relazione (2.211) rappresenta la verifica analitica di quanto anticipato in precedenza. Al variare di \mathbf{n} si riconosce che \mathbf{s}' , cioè il vettore numerico associato a \mathbf{s} nella base $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\}$, rimane identico e solo la sua prima componente è diversa da zero. Il vettore \mathbf{d}' ruota di -2α se \mathbf{n} è ruotato di α .

Il sistema di riferimento con origine nel punto P in esame ed assi paralleli rispettivamente a \mathbf{n} ed a \mathbf{m} è detto 'riferimento di Mohr'. Al variare di \mathbf{n} , ovvero dell'angolo α ,

la (2.211) descrive nel riferimento di Mohr un cerchio di centro $\mathbf{c} = \mathbf{s}'$ e raggio R dati da (figura 2.26):

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}' = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.213)$$

Nel riferimento di Mohr sulle ascisse si legge la componente normale σ_n del vettore tensione e sulle ordinate si legge la componente tangenziale τ_{nm} . Gli assi del riferimento vengono pertanto indicati come assi σ_n e τ_{nm} .

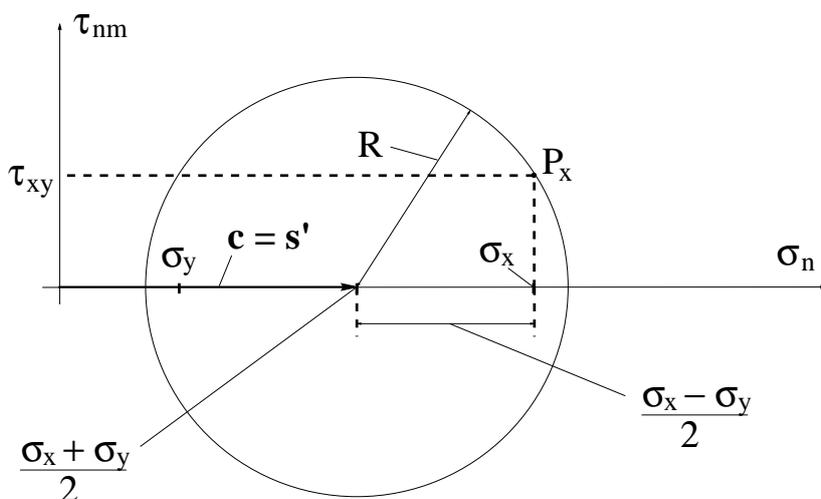


Figura 2.26: Costruzione del cerchio di Mohr.

Per $\alpha = 0$ si ottiene il cosiddetto polo P_x del cerchio, sottolineando con il pedice x che il vettore $\mathbf{t}'(\alpha = 0)$ rappresenta nel riferimento di Mohr il vettore tensione agente sulla giacitura di normale \mathbf{i} , cioè parallela all'asse x .

Ruotando \mathbf{n} di un angolo α si è visto che nel riferimento di Mohr il vettore $\mathbf{d}'(\alpha)$ ruota di -2α . Data allora una normale \mathbf{n} come in figura 2.27, per ottenere il punto P_n estremo nel riferimento di Mohr del vettore $\mathbf{t}'(\mathbf{n}) = \mathbf{t}'(\alpha)$, si traccia da P_x la parallela a \mathbf{n} e dall'intersezione di tale retta con il cerchio si traccia la retta orizzontale, ovvero la parallela a \mathbf{i} . L'intersezione di quest'ultima con il cerchio fornisce il punto P_n cercato. Infatti, se \mathbf{n} forma un angolo α con \mathbf{i} , per la proprietà degli angoli al cerchio ed alla circonferenza allora il vettore $\mathbf{d}'(\alpha)$ forma con $\mathbf{d}'(\alpha = 0)$ un angolo di -2α , cioè verifica la relazione (2.212)₂.

Riassumendo, la procedura appena illustrata, e descritta in figura 2.27, consente, assegnata una normale \mathbf{n} , di trovare il punto del cerchio P_n estremo del vettore $\mathbf{t}'(\mathbf{n})$ nel riferimento di Mohr. La procedura inversa consente invece di conoscere, assegnato un punto P_n del cerchio, cioè un vettore \mathbf{t}' con estremo sul cerchio, la normale \mathbf{n} del piano corrispondente, ovvero tale che $\mathbf{t}' = \mathbf{t}'(\mathbf{n})$. Tale procedura inversa consiste dunque nel tracciare dal punto P_n una retta orizzontale e dall'intersezione di questa con il cerchio

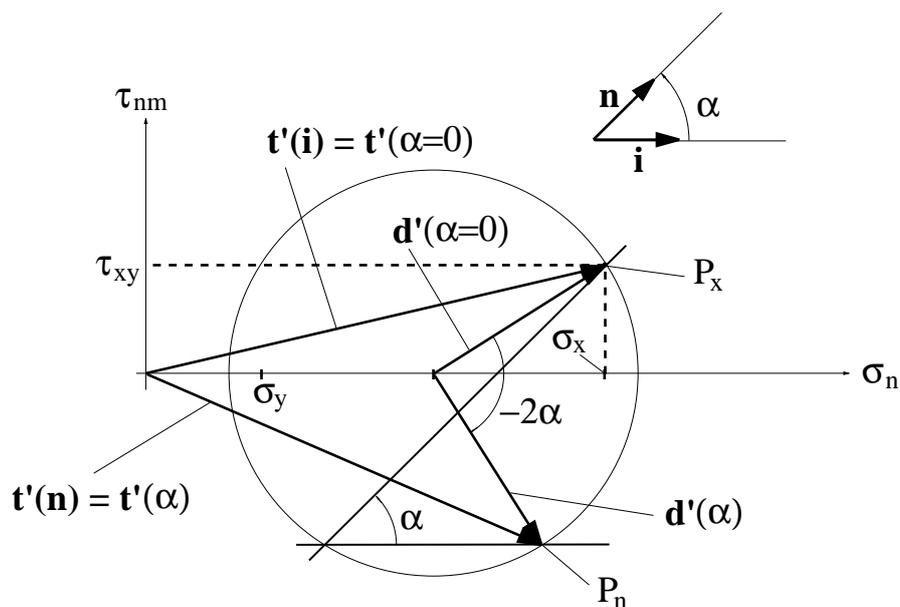


Figura 2.27: Costruzione grafica della corrispondenza tra \mathbf{n} e P_n sul cerchio di Mohr.

la congiungente con il punto P_x . Quest'ultima retta è parallela alla normale \mathbf{n} , che è quindi definita in direzione ma non in verso. D'altra parte i vettori $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ e $\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n})$ corrispondono allo stesso vettore \mathbf{t}' nel riferimento di Mohr. Infatti $-\mathbf{n}$ si ottiene ruotando \mathbf{n} di π , per cui il vettore $\mathbf{d}'(-\mathbf{n})$ si ottiene da $\mathbf{d}'(\mathbf{n})$ mediante una rotazione di -2π , per cui $\mathbf{d}'(-\mathbf{n}) = \mathbf{d}'(\mathbf{n})$ e quindi $\mathbf{t}'(-\mathbf{n}) = \mathbf{t}'(\mathbf{n})$.

In alcuni testi si utilizza una rappresentazione leggermente diversa per la quale viene assunto quale punto del cerchio corrispondente ad una normale \mathbf{n} il punto P'_n simmetrico di quello P_n ricavato in precedenza. Il punto P'_n si ottiene allora tracciando dallo stesso polo P_x introdotto in precedenza, cioè dal punto di ascissa σ_x ed ordinata τ_{xy} , una retta parallela alla giacitura di normale \mathbf{n} . Infatti dalla figura 2.28 si riconosce che, essendo l'angolo $QP_nP'_n$ pari a $\pi/2$, il segmento $\overline{QP'_n}$ è un diametro del cerchio. Quindi anche l'angolo $QP_xP'_n$ è pari a $\pi/2$, per cui il segmento $\overline{P'_nP_x}$ è ortogonale alla normale \mathbf{n} .

2.4.1 I tre cerchi principali e l'arbelo di Mohr

Poiché si è fatta variare la normale \mathbf{n} in un piano principale, in questo caso ortogonale all'asse $z = \zeta$ che è principale, la componente τ_{nm} rappresenta l'intera componente tangenziale del vettore tensione $\mathbf{t}(\mathbf{n})$. Pertanto i due punti intersezione del cerchio con l'asse delle ascisse, corrispondenti a valori nulli della τ_{nm} , corrispondono a due normali per le quali la componente tangenziale del vettore tensione è nulla, ovvero alle altre due direzioni principali ξ e ζ di versori \mathbf{e}_{p1} ed \mathbf{e}_{p2} . I corrispondenti valori della σ_n rappresentano dunque le due altre tensioni principali σ_1 e σ_2 (figura 2.29) date da:

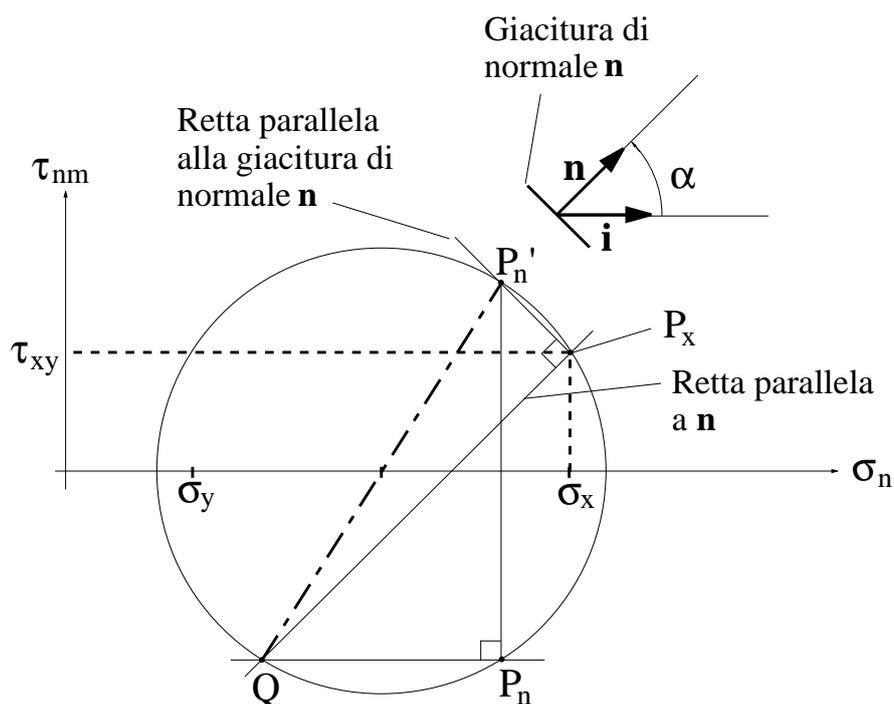


Figura 2.28: Costruzione grafica della corrispondenza tra n e P'_n sul cerchio di Mohr.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.214)$$

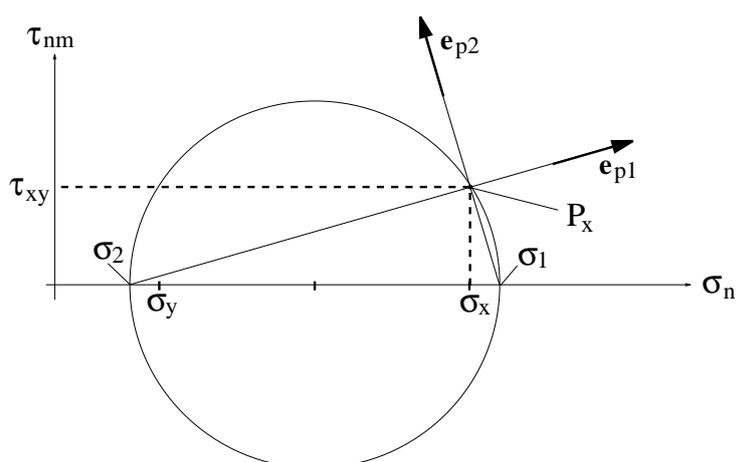


Figura 2.29: Determinazione grafica delle tensioni principali e delle direzioni principali di tensione.

La costruzione del cerchio di Mohr può ripetersi facendo variare la normale \mathbf{n} negli altri due piani principali ξ, ζ e η, ζ . Si ottengono altri due cerchi uno dei quali dovrà passare per i punti di ordinata nulla ed ascisse σ_1 e σ_3 ed un altro per i punti di ordinata nulla ed ascisse σ_2 e σ_3 . I tre cerchi così ottenuti sono detti cerchi principali di Mohr e sono a due a due tangenti fra loro (figura 2.30). Il centro del cerchio principale intersecante sulle ascisse le tensioni principali σ_i e σ_j è stato indicato in figura con C_{ij} , ed analogamente si è fatto per gli altri due cerchi.

Considerando una normale qualsiasi, cioè anche non contenuta in un piano principale, si consideri il punto P_n nel riferimento di Mohr avente quale ascissa il valore della componente normale di $\mathbf{t}(\mathbf{n})$, cioè $\sigma_n = \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$ e quale ordinata il modulo $\|\boldsymbol{\tau}_n\|$ del vettore componente tangenziale $\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{t}(\mathbf{n}) - \sigma_n \mathbf{n}$. Si dimostra che al variare di \mathbf{n} il punto P_n è sempre non esterno all'area campita in figura 2.30, detta 'arbelo' di Mohr.

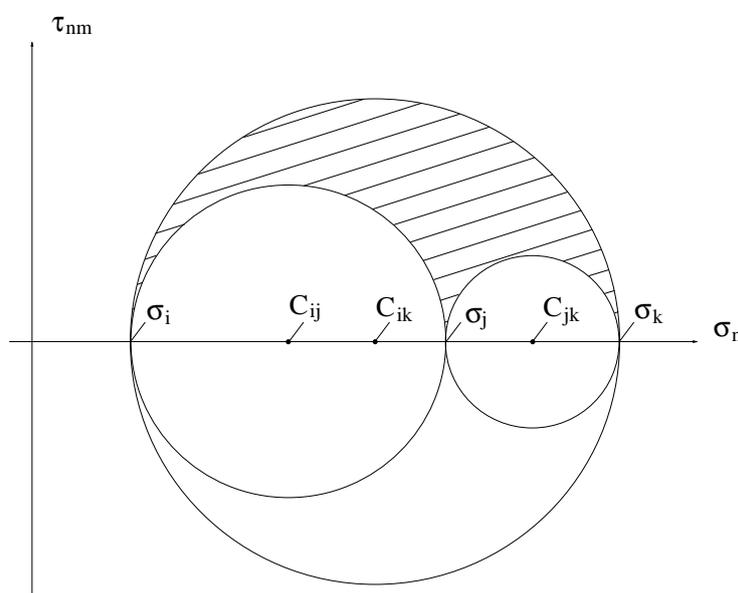


Figura 2.30: Cerchi principali di Mohr e arbelo di Mohr ($i \neq j \neq k \neq i$).

2.5 Lavoro virtuale interno

Si estragga dal corpo \mathcal{B} , nella configurazione Ω , un cubetto elementare con gli spigoli paralleli agli assi x , y e z di lato $l = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ e si supponga che tale cubetto sia caratterizzato da uno stato tensionale uniforme e monoassiale definito, nella base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, dalla matrice:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.215)$$

Sulle due facce del cubetto di normali \mathbf{i} e $-\mathbf{i}$, di area pari a $A_x = \Delta y \Delta z$, agisce dunque una tensione normale uniforme pari a σ_x (figura 2.31).

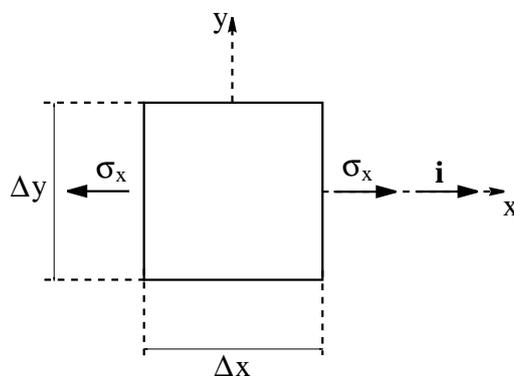


Figura 2.31: Lavoro interno: sistema di forze interne.

Si consideri ora lo stesso cubetto caratterizzato da uno stato di deformazione uniforme e monoassiale definito, nella base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, dalla matrice:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.216)$$

Il corrispondente spostamento relativo fra le due facce del cubetto di normali \mathbf{i} e $-\mathbf{i}$ è dato da (figura 2.32):

$$\Delta l_x = \varepsilon_x \Delta x \quad (2.217)$$

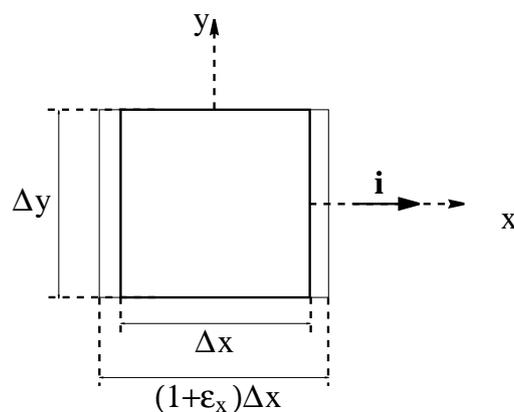


Figura 2.32: Lavoro interno: sistema di deformazioni.

Si supponga che non esista nessuna relazione di causa-effetto fra il sistema di forze interne definito dalla (2.215) ed il sistema di deformazioni definito dalla (2.216). Il lavoro compiuto dalla tensione σ_x sulle facce di normale \mathbf{i} e $-\mathbf{i}$ per lo spostamento relativo (2.217) fra le due facce è dunque un lavoro virtuale e vale:

$$\Delta L_{i,x} = (\sigma_x A_x) \Delta l_x = \sigma_x \varepsilon_x \Delta x (\Delta y \Delta z) = \sigma_x \varepsilon_x \Delta V \quad (2.218)$$

dove con $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ si è indicato il volume del cubetto.

Considerando stati monoassiali dati dalle (2.215) e (2.216) ma non necessariamente costanti, si può approssimare tali campi tensoriali con campi costanti in cubetti elementari di volume ΔV , effettuare la sommatoria di tutti i termini ottenuti scrivendo in ciascun cubetto la (2.218) e calcolare il limite per un numero crescente di cubetti con $\Delta V \rightarrow 0$, mediante la ben nota procedura di integrazione dell'analisi. Si chiarisce in tal modo che l'espressione del lavoro virtuale interno $L_{i,x}$, nel caso di stati monoassiali di tensione e deformazione in direzione x , è la seguente:

$$L_{i,x} = \int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x d\Omega \quad (2.219)$$

Un ragionamento analogo può farsi per le altre componenti di tensione e si può dimostrare che, nel caso generale di stati tensionali e di deformazione qualsiasi, il lavoro virtuale interno assume l'espressione:

$$L_i = \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) d\Omega \quad (2.220)$$

Poiché $\sigma_x = T_{11}$, $\sigma_y = T_{22}$, $\sigma_z = T_{33}$, $\tau_{xy} = T_{12}$, $\tau_{yz} = T_{23}$, $\tau_{xz} = T_{13}$, ed inoltre $\varepsilon_x = E_{11}$, $\varepsilon_y = E_{22}$, $\varepsilon_z = E_{33}$, $\gamma_{xy} = 2 E_{12}$, $\gamma_{yz} = 2 E_{23}$, $\gamma_{xz} = 2 E_{13}$, la (2.220) si può anche scrivere:

$$L_i = \int_{\Omega} (T_{11} E_{11} + T_{22} E_{22} + T_{33} E_{33} + 2 T_{12} E_{12} + 2 T_{23} E_{23} + 2 T_{13} E_{13}) d\Omega \quad (2.221)$$

Poiché poi, per la simmetria di \mathbf{T} e di \mathbf{E} , risulta $T_{12} = T_{21}$, $T_{23} = T_{32}$, $T_{13} = T_{31}$ ed inoltre $E_{12} = E_{21}$, $E_{23} = E_{32}$, $E_{13} = E_{31}$, la (2.221) si può ancora scrivere:

$$L_i = \int_{\Omega} (T_{11} E_{11} + T_{22} E_{22} + T_{33} E_{33} + T_{12} E_{12} + T_{21} E_{21} + T_{23} E_{23} + T_{32} E_{32} + T_{13} E_{13} + T_{31} E_{31}) d\Omega \quad (2.222)$$

cioè:

$$L_i = \int_{\Omega} \mathbf{T} * \mathbf{E} d\Omega \quad (2.223)$$

dove $\mathbf{T} * \mathbf{E}$ indica il prodotto scalare fra i due tensori \mathbf{T} ed \mathbf{E} , che si calcola come somma dei prodotti delle componenti omologhe, in analogia con quanto avviene per il prodotto scalare fra vettori.

2.6 Legame elastico

La relazione esistente fra la deformazione dell'intorno di un punto e lo stato tensionale agente nel punto stesso di un modello continuo tridimensionale è detta 'legame costitutivo' del modello. Il legame costitutivo più efficace da adottare nella modellazione matematica di un problema strutturale dipende dal materiale in esame e dal tipo di analisi che si vuole svolgere. In questa sezione si studierà il legame elastico lineare, ovvero il più semplice dei legami costitutivi, che ben schematizza il comportamento di molti dei materiali correntemente utilizzati nelle applicazioni strutturali dell'ingegneria solo per valori limitati dello stato tensionale e deformativo, come si vedrà in modo più dettagliato nella sezione sui criteri di resistenza. Tuttavia la progettazione tende quasi sempre a far sì che i valori della tensione e della deformazione rientrino in tali limiti.

Si faranno inoltre le ipotesi di piccolezza degli spostamenti¹⁷ e di isotropia del materiale. Tralasciando per semplicità una definizione matematicamente rigorosa di isotropia, una definizione più euristica ma indubbiamente efficace è quella per cui un materiale è isotropo quando il suo comportamento è identico in tutte le direzioni. Dal punto di vista sperimentale un provino cubico di materiale omogeneo¹⁸ ed isotropo sottoposto ad una prova meccanica fornisce risultati identici comunque esso venga orientato nella macchina di prova.

Si consideri un cilindro di materiale soggetto ad uno stato di tensione monoassiale uniforme nella direzione 1, ovvero caratterizzato in ogni punto dal tensore:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.224)$$

E' evidente che la direzione 1 è principale e che tutte le direzioni ad essa ortogonali sono anche principali.

Si assuma che il cilindro sia anche omogeneo. Nel caso di comportamento elastico lineare si ritrova uno stato di deformazione caratterizzato da una dilatazione lineare in direzione 1 uniforme e data da (figura 2.33):

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad (2.225)$$

e da una dilatazione lineare ε_t uguale in ogni direzione ortogonale a 1 e pari a:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \varepsilon_1 = -\nu \frac{\sigma_1}{E} \quad (2.226)$$

¹⁷A stretto rigore, per la validità del comportamento elastico lineare basterebbe l'ipotesi di 'piccole deformazioni', ovvero che le dilatazioni lineari e gli scorrimenti siano molto inferiori all'unità, che non implica necessariamente il fatto che gli spostamenti siano piccoli. Si pensi ad esempio ad un moto rigido (non infinitesimo) di un corpo, in cui le deformazioni sono addirittura nulle e gli spostamenti invece possono essere molto grandi. Tuttavia l'ipotesi di piccoli spostamenti è comoda per la trattazione perché consente di descrivere le deformazione mediante il tensore della deformazione infinitesima e la sua rimozione introdurrebbe complessità ben lontane dagli scopi della presente trattazione.

¹⁸L'ipotesi di isotropia non va confusa con quella di omogeneità, per la quale il materiale è caratterizzato dalle stesse proprietà in ciascun punto. Si osservi che un corpo continuo può avere un comportamento omogeneo e isotropo, omogeneo ed anisotropo, isotropo e disomogeneo, disomogeneo ed anisotropo.

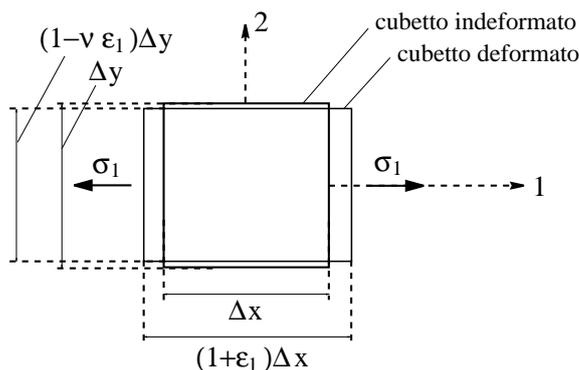


Figura 2.33: stato di tensione monoassiale in direzione 1.

Il modulo E è detto ‘modulo di Young’ ed ha le dimensioni $[E] = [F L^{-2}]$. Il coefficiente ν è detto ‘rapporto’ o anche ‘coefficiente di Poisson’ ed è adimensionale.

Si riscontrano inoltre scorrimenti nulli tra le direzioni 1, 2 e 3. Pertanto il tensore della deformazione infinitesima associato a \mathbf{T} è dato da:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \sigma_1 \end{bmatrix} \quad (2.227)$$

La relazione (2.227), scritta con riferimento ad uno stato di tensione costante, viene assunta anche nel caso di stato tensionale variabile quale relazione puntuale tra uno stato di tensione monoassiale ed il corrispondente tensore della deformazione infinitesima, ed anche se il materiale non è omogeneo¹⁹.

Poiché l’ipotesi di isotropia del materiale equivale ad assumere un comportamento uguale in ciascuna direzione, due stati monoassiali rispettivamente nelle direzioni 2 e 3 conducono a due tensori della deformazione infinitesima analoghi a quello della (2.227):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\nu \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (2.228)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\nu \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.229)$$

Si sottolinea in particolare che per l’ipotesi di isotropia il modulo di Young ed il coefficiente di Poisson non dipendono dalla direzione dello stato monoassiale.

¹⁹Se il materiale non è omogeneo E e ν cambiano da punto a punto.

Si consideri ora uno stato di sollecitazione definito nella base principale dalla matrice:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.230)$$

Riguardando tale stato di tensione come sovrapposizione di tre stati monoassiali ed in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti il legame elastico associa a tale stato tensionale i seguenti valori delle dilatazioni lineari e degli scorrimenti:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu (\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)] \\ \gamma_{12} &= \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0 \end{aligned} \quad (2.231)$$

Aggiungendo e sottraendo $\nu \sigma_i$ nell'espressione della dilatazione lineare ε_i si ottiene ancora:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \gamma_{12} &= \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0 \end{aligned} \quad (2.232)$$

ovvero:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2} \gamma_{12} & \frac{1}{2} \gamma_{13} \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} & \varepsilon_2 & \frac{1}{2} \gamma_{23} \\ \frac{1}{2} \gamma_{13} & \frac{1}{2} \gamma_{23} & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1 + \nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \mathbf{T}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.233)$$

che in modo tensionale intrinseco, cioè indipendente dalla base scelta, può scriversi:

$$\mathbf{E} = \frac{1 + \nu}{E} \mathbf{T} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I} \quad (2.234)$$

La relazione (2.234) definisce completamente il legame elastico lineare isotropo. Si riconosce dunque che in tali ipotesi il legame costitutivo dipende solo da due costanti, che vanno ricavate sperimentalmente. Nella tabella 2.1 sono riportati alcuni valori di E e di ν per alcuni materiali molto utilizzati in ingegneria strutturale.

Materiale	E (MPa)	ν
Acciaio	$(2.0 \div 2.1) \times 10^5$	$0.25 \div 0.33$
Alluminio	6.6×10^4	0.36
Calcestruzzo	$(2 \div 4) \times 10^4$	$0.1 \div 0.15$
Tufo	$(3 \div 15) \times 10^3$	$0.1 \div 0.15$

Tabella 2.1: Valori del modulo di Young E e del rapporto di Poisson ν per alcuni materiali.

In una base non principale $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la relazione (2.234) fornisce il seguente legame fra le matrici della deformazione e della tensione:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1 + \nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \mathbf{T}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.235)$$

ovvero le seguenti relazioni fra le componenti di deformazione e di tensione:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_z &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \end{aligned} \quad (2.236)$$

dove G è detto modulo di 'elasticità tangenziale' ed è legato ad E ed a ν dalla relazione:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.237)$$

Per ricavare la relazione inversa della (2.234), cioè la relazione che fornisce il tensore della tensione \mathbf{T} in funzione del tensore della deformazione infinitesima \mathbf{E} , si calcoli la

traccia di ambo i membri della (2.234):

$$\operatorname{tr} \mathbf{E} = \frac{1 + \nu}{E} \operatorname{tr} \mathbf{T} - \frac{3\nu}{E} \operatorname{tr} \mathbf{T} = \frac{1 - 2\nu}{E} \operatorname{tr} \mathbf{T} \quad (2.238)$$

dove si è utilizzata la relazione $\operatorname{tr} \mathbf{I} = 3$, facilmente ottenibile calcolando la traccia della matrice identica. Dalla (2.238) si ricava:

$$\operatorname{tr} \mathbf{T} = \frac{E}{1 - 2\nu} \operatorname{tr} \mathbf{E} \quad (2.239)$$

Il rapporto fra $\operatorname{tr} \mathbf{T}$ e $\operatorname{tr} \mathbf{E}$, è spesso indicato con k

$$k = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{T}}{\operatorname{tr} \mathbf{E}} = \frac{E}{1 - 2\nu}, \quad (2.240)$$

ed è detto ‘modulo di elasticità volumetrico’ in quanto è il rapporto fra la somma delle tensioni normali agenti su tre facce ortogonali del cubetto elementare e la dilatazione volumetrica Θ , che nell’ipotesi qui fatta di piccoli spostamenti è proprio pari a $\operatorname{tr} \mathbf{E}$ (formula (2.136)).

Sostituendo la (2.239) nella (2.234) si ottiene:

$$\mathbf{E} = \frac{1 + \nu}{E} \mathbf{T} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{E}{1 - 2\nu} \right) (\operatorname{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} = \frac{1 + \nu}{E} \mathbf{T} - \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\operatorname{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} \quad (2.241)$$

Da quest’ultima relazione, ricordando anche la (2.237), si ricava:

$$\mathbf{T} = 2G \mathbf{E} + \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} \quad (2.242)$$

dove

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.243)$$

Le costanti G e λ sono anche note come ‘costanti di Lamé’. In componenti si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2G + \lambda) \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \sigma_y &= (2G + \lambda) \varepsilon_y + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_z) \\ \sigma_z &= (2G + \lambda) \varepsilon_z + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (2.244)$$

2.6.1 Espressioni matriciali del legame elastico

Le relazioni (2.234) e (2.242), che esprimono in forma intrinseca il legame elastico fra \mathbf{T} ed \mathbf{E} nelle due forme una inversa dell’altra possono essere scritte mediante l’introduzione di un tensore del quarto ordine \mathbb{D} :

$$\mathbf{T} = \mathbb{D} \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = \mathbb{D}^{-1} \mathbf{T} \quad (2.245)$$

Invece di ricavare le espressioni del tensore \mathbb{D} , conviene riscrivere le (2.236) e (2.244) in modo compatto mediante la seguente notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.246)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.247)$$

2.6.2 Energia elastica

Si consideri ora il cubetto elementare soggetto ad uno stato di tensione monoassiale uniforme in direzione x e caratterizzato dal tensore di deformazione ad esso associato mediante il legame elastico:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \sigma_x \end{bmatrix} \quad (2.248)$$

In particolare la relazione esistente fra la componente σ_x e la componente ε_x è la seguente:

$$\sigma_x = \sigma_x(\varepsilon_x) = E \varepsilon_x \quad (2.249)$$

Si consideri ora l'evoluzione della ε_x dal valore nullo iniziale ad un valore finale $\bar{\varepsilon}_x$. Dalla (2.249) si deduce che la tensione σ_x varierà anch'essa da un valore nullo iniziale ad un valore finale pari a $\bar{\sigma}_x = E \bar{\varepsilon}_x$.

Quando, in un istante generico del processo di deformazione, la dilatazione assume il valore ε_x il lavoro realmente compiuto dalla tensione per il successivo incremento di deformazione $d\varepsilon_x$ vale:

$$d(\Delta L_{def,x}) = \sigma_x(\varepsilon_x) d\varepsilon_x \Delta V \quad (2.250)$$

essendo ancora ΔV il volume del cubetto. Nel termine $d(\Delta L_{def,x})$ d indica che il termine a secondo membro è il lavoro compiuto nell'incremento infinitesimo di deformazione, mentre Δ indica che il lavoro è compiuto nel cubetto elementare. Nell'intero processo deformativo tra il valore iniziale nullo ed il valore finale il lavoro complessivamente compiuto dalla tensione nel cubetto elementare vale:

$$\begin{aligned} \Delta L_{def,x} &= \left(\int_0^{\bar{\varepsilon}_x} \sigma_x(\varepsilon_x) d\varepsilon_x \right) \Delta V = \left(\int_0^{\bar{\varepsilon}_x} E\varepsilon_x d\varepsilon_x \right) \Delta V = \\ &= \frac{1}{2} E \bar{\varepsilon}_x^2 \Delta V = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x \Delta V \end{aligned} \quad (2.251)$$

ed è pari all'area triangolare campita in figura 2.34 moltiplicata per ΔV .

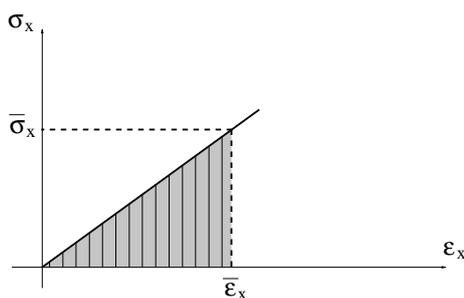


Figura 2.34: Lavoro di deformazione per uno stato monoassiale.

Con il solito processo di integrazione si ottiene che, per uno stato monoassiale, il lavoro complessivamente compiuto dalla tensione, nell'intero processo deformativo dal valore iniziale nullo di ε_x al valore finale $\bar{\varepsilon}_x$, vale per l'intero corpo:

$$L_{def,x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \bar{\varepsilon}_x^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x d\Omega \quad (2.252)$$

Un ragionamento analogo può farsi per le altre componenti di tensione e si può dimostrare che nel caso generale il lavoro complessivamente compiuto dalla tensione, nell'intero processo deformativo dal valore iniziale nullo di \mathbf{E} ad un valore finale $\bar{\mathbf{E}}$, vale per l'intero corpo:

$$L_{def} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D} \bar{\mathbf{E}} * \bar{\mathbf{E}} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{T}} * \bar{\mathbf{E}} d\Omega \quad (2.253)$$

con $\bar{\mathbf{T}} = 2G\bar{\mathbf{E}} + \lambda(\text{tr}\bar{\mathbf{E}})\mathbf{I}$. Tale lavoro è detto ‘lavoro di deformazione’.

Una caratteristica molto importante del legame elastico è che esso è conservativo. Ciò vuol dire che il lavoro di deformazione (2.253) è indipendente dal percorso deformativo e dipende solamente dai valori iniziali e finali delle deformazioni e delle tensioni. Nella teoria del potenziale si dimostra che tale ipotesi di conservatività equivale all’esistenza di una funzione ϕ di \mathbf{E} , detta ‘energia elastica specifica’ o anche ‘potenziale elastico’, tale che:

$$L_{def} = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{E}) d\Omega \quad (2.254)$$

Dal confronto con la (2.253) si ricava l’espressione del potenziale elastico:

$$\phi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbb{D} \bar{\mathbf{E}} * \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{T}} * \bar{\mathbf{E}} \quad (2.255)$$

La conservatività del legame elastico si traduce dunque nel fatto che il lavoro di deformazione viene immagazzinato sotto forma di ‘energia elastica’.

2.6.3 Limiti di validità per le costanti elastiche

Dalla relazione (2.249), valida nel caso di stato tensionale monoassiale, si deduce che per avere σ_x e ε_x dello stesso segno, in modo che a dilatazione positiva corrisponda una tensione di trazione e ad una contrazione corrisponda una compressione, il modulo di E deve essere positivo. Dalla relazione (2.252) si vede anche che la condizione $E > 0$ può essere ricavata dall’altra, fisicamente ragionevole, che l’energia elastica sia definita positiva, cioè sia positiva per valori non nulli di \mathbf{E} .

Con ragionamenti analoghi si deduce dalle ultime tre delle (2.244) e dalla (2.240) che deve aversi $G > 0$ e $k > 0$. Le tre condizioni su E , G e k impongono dei limiti teorici al valore di ν . Infatti si ha:

$$G > 0 \Rightarrow \frac{E}{2(1+\nu)} > 0 \Rightarrow \nu > -1 \quad (2.256)$$

$$k > 0 \Rightarrow \frac{E}{(1-2\nu)} > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

e quindi:

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (2.257)$$

I limiti definiti nella (2.257) sono detti teorici in quanto valori negativi di ν sono stati ottenuti solo in laboratorio. Tutti i materiali utilizzati nella grande maggioranza delle applicazioni ingegneristiche presentano valori di ν non negativi.

2.7 Criteri di resistenza

L’ipotesi di comportamento elastico lineare risulta valida per valori limitati dello stato tensionale. Oltre una certa soglia il modello matematico deve tener conto dei fenomeni

di plasticizzazione e di frattura nel materiale. In questa sezione si studieranno alcuni criteri, detti 'criteri di resistenza', utilizzati per definire il cosiddetto dominio elastico, costituito dall'insieme degli stati tensionali per i quali risulta valida l'ipotesi di elasticità lineare.

Si parte dall'analisi dei risultati di una prova di trazione su una barra di acciaio dolce, quali quelle che si utilizzano per le armature di rinforzo del calcestruzzo armato (figura 2.35).

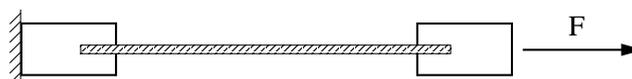


Figura 2.35: Prova di trazione di una barra di acciaio dolce.

Per effetto della forza di trazione F applicata si ottiene uno stato tensionale monoassiale con l'unica tensione principale non nulla pari a $\sigma = F/A$, essendo A l'area della sezione trasversale della barra. Misurando la dilatazione lineare ε nella direzione longitudinale si ottiene un diagramma $\sigma - \varepsilon$ simile a quello riportato in figura 2.36. Si riconosce un primo ramo elastico lineare, la cui pendenza fornisce il valore del modulo di Young del materiale, fino ad un valore σ_y della tensione, detto tensione di snervamento, ed un corrispondente valore ε_y della deformazione. Segue un ramo pressoché piatto del diagramma in cui la deformazione aumenta per un valore praticamente costante della tensione pari a σ_y . Si riscontra poi un successivo incrudimento del materiale e quindi la rottura.

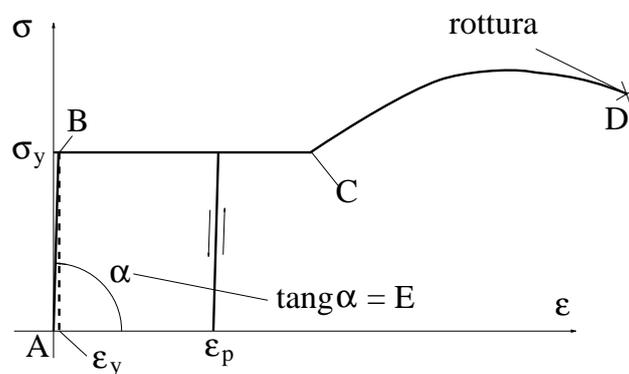


Figura 2.36: Curva $\sigma - \varepsilon$ per una barra di acciaio dolce.

La deformazione ε_y per un acciaio duro è dell'ordine di $0.001 - 0.002$ ed il corrispondente valore della tensione di snervamento dell'ordine di $200 - 400 \text{ MPa}$. Il ramo BCD della curva corrisponde alla parte della prova in cui all'interno del materiale si hanno grandi deformazioni plastiche. Scaricando il provino in questa fase si rileva una pendenza in fase di scarico praticamente uguale a quella misurata in fase elastica e, per $\sigma = 0$, un valore residuo di deformazione corrispondente alla deformazione plastica

irreversibile ε_p che si è avuta fino a quel punto durante il carico. La rottura si ha per valori della deformazione plastica dell'ordine di 0.2, ovvero del 20%.

Per altri materiali prove di trazione e di compressione in regime monoassiale forniscono risultati qualitativamente e quantitativamente piuttosto diversi e si tralascia in questa sede un studio approfondito di tali aspetti. Ci si limita a sottolineare che per la maggior parte dei materiali è possibile, attraverso delle prove in regime monoassiale, definire dei valori limite delle tensioni a trazione σ_t ed a compressione σ_c ed un intervallo $[-\sigma_c, \sigma_t]$ entro il quale si può assumere valida l'ipotesi di comportamento elastico lineare. Tale intervallo rappresenta il dominio elastico nel caso di uno stato tensionale monoassiale.

Si definisce 'criterio di resistenza' un criterio con il quale, a partire dall'intervallo $[-\sigma_c, \sigma_t]$ valido per stati monoassiali, si definisce un dominio elastico nello spazio delle tensioni, ovvero dei tensori simmetrici del secondo ordine. Si prenderanno in considerazione materiali isotropi, per i quali il dominio elastico può esprimersi mediante una funzione f , detta 'funzione di plasticizzazione', che dipende solamente dalle tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ del tensore delle tensioni, e non dalle rispettive direzioni principali. In altre parole due stati tensionali aventi diverse direzioni principali ma tensioni principali uguali sono equivalenti ai fini dell'appartenenza o meno al dominio elastico. Lo studio dei criteri di resistenza isotropi può dunque condursi con riferimento allo spazio tridimensionale delle tensioni principali. Per i criteri che si studieranno il dominio elastico è un insieme convesso di tale spazio che contiene al suo interno l'origine, ovvero lo stato tensionale nullo.

Un stato tensionale è interno al dominio elastico se si ha:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0 \quad (2.258)$$

L'equazione

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (2.259)$$

definisce la frontiera del dominio elastico, detta anche 'superficie di plasticizzazione'. Per l'ipotesi di isotropia l'ordine degli argomenti di f non ha influenza sul valore della funzione e dunque deve aversi:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2) = f(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2) = \dots \quad (2.260)$$

2.7.1 Criteri di resistenza per materiali duttili

I materiali duttili sono caratterizzati da valori elevati della deformazione plastica prima della rottura e tipicamente manifestano valori molto simili, che spesso si assumono coincidenti, delle tensioni limite a trazione e a compressione σ_t e σ_c in prove monoassiali. In tal senso essi sono materiali 'isoresistenti' e per essi si può definire un unico valore limite $\sigma_o = \sigma_t = \sigma_c$.

In tali materiali il superamento del limite elastico si accompagna a scorrimenti plastici che si hanno a causa del raggiungimento di valori di soglia delle tensioni tangenziali su alcune giaciture. Molto utilizzati nelle applicazioni sono i criteri di 'Tresca' e di 'von Mises'.

Criterio di Tresca

Secondo il criterio di Tresca si ha plasticizzazione in un punto quando la massima tensione tangenziale τ_{max} in quel punto raggiunge un valore limite. Dalla teoria dei cerchi di Mohr si ricava (figura 2.37) che la tensione tangenziale massima è pari al raggio del cerchio principale massimo di Mohr, ovvero:

$$\tau_{max} = \max \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right\} \quad (2.261)$$

e l'equazione della superficie di plasticizzazione è:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right\} - c = 0 \quad (2.262)$$

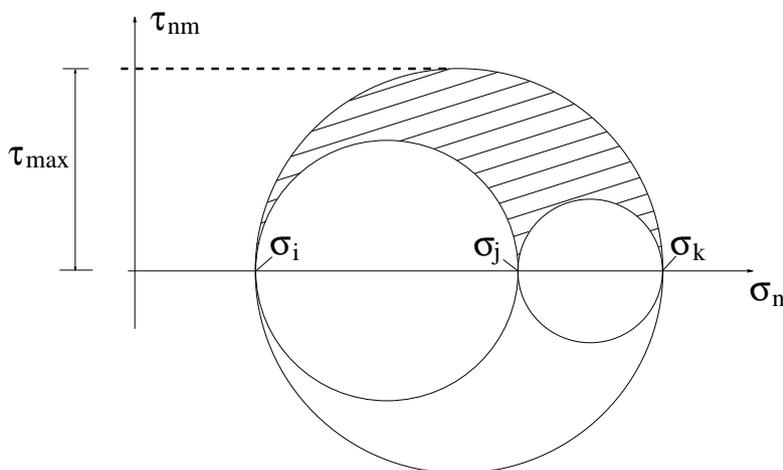


Figura 2.37: Determinazione della tensione tangenziale massima τ_{max} mediante i cerchi di Mohr.

La costante c si determina imponendo che nello stato monoassiale in cui $\sigma_1 = \sigma_o$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, ovvero in corrispondenza del limite di plasticizzazione, risulti $f = 0$, ovvero:

$$f(\sigma_o, 0, 0) = \frac{\sigma_o}{2} - c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\sigma_o}{2} \quad (2.263)$$

Sostituendo nella (2.262) e semplificando si ottiene la condizione di plasticizzazione secondo Tresca:

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \} = \sigma_o \quad (2.264)$$

Introducendo una tensione scalare equivalente σ_{eq} , che per il criterio di Tresca è data da:

$$\sigma_{eq} = \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \} \quad (2.265)$$

la condizione di plasticizzazione di Tresca può anche scriversi come segue:

$$\sigma_{eq} = \sigma_o \quad (2.266)$$

Criterio di von Mises

Secondo il criterio di von Mises la plasticizzazione avviene quando la media quadratica delle tre tensioni tangenziali massime nei tre piani principali raggiunge un valore limite. L'equazione della superficie di plasticizzazione si scrive allora come segue:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2} - c = 0 \quad (2.267)$$

La costante c si determina ancora imponendo che nello stato monoassiale in cui $\sigma_1 = \sigma_o$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ risulti $f = 0$, ovvero:

$$f(\sigma_o, 0, 0) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\sigma_o^2}{4} + \frac{\sigma_o^2}{4}} - c = \frac{\sigma_o}{3\sqrt{2}} - c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\sigma_o}{3\sqrt{2}} \quad (2.268)$$

Sostituendo nella (2.267), sviluppando i quadrati sotto la radice quadrata e semplificando si ottiene la condizione di plasticizzazione secondo von Mises:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} = \sigma_o \quad (2.269)$$

Introducendo la tensione scalare equivalente σ_{eq} secondo von Mises:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} \quad (2.270)$$

la condizione di plasticizzazione di von Mises può anche scriversi mediante la formula (2.266).

Gli stati tensionali caratterizzati da $\sigma_{eq} < \sigma_o$ definiscono dunque punti del dominio elastico.

Asse idrostatico e piano deviatorico

Dato uno stato tensionale generico rappresentato in una terna principale dalla matrice:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.271)$$

dalla teoria dei cerchi di Mohr si riconosce che aggiungendo uno stato idrostatico $\mathbf{T}_{idr} = \sigma \mathbf{I}$ si ottiene:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T} + \mathbf{T}_{idr} = \begin{bmatrix} \sigma_1 + \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 + \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 + \sigma \end{bmatrix} \quad (2.272)$$

e quindi i centri dei cerchi di Mohr traslano di σ mentre i raggi non variano:

$$C'_k = \frac{(\sigma_i + \sigma) + (\sigma_j + \sigma)}{2} = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} + \sigma = C_k + \sigma \quad (2.273)$$

$$R'_k = \frac{(\sigma_i + \sigma) - (\sigma_j + \sigma)}{2} = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} = R_k$$

Non variando i raggi non variano le massime tensioni tangenziali nei piani principali, pari proprio ai raggi, e dunque sia per il criterio di Tresca che per quello di von Mises non variano né la funzione di plasticizzazione né la σ_{eq} . In particolare la σ_{eq} associata ad uno stato tensionale idrostatico è nulla per cui l'asse definito da $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, detto 'asse idrostatico' ed avente versore $\mathbf{m} = (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$ (figura 2.38), non incontra mai la superficie di plasticizzazione che dunque risulta essere una superficie cilindrica parallela a tale asse.

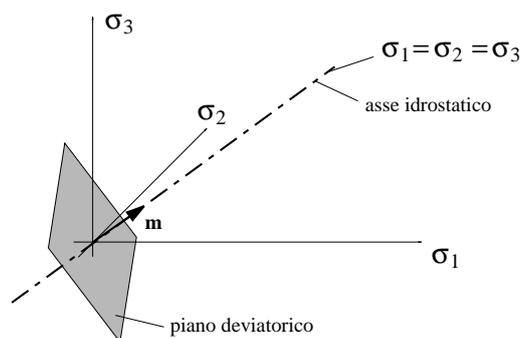


Figura 2.38: Asse idrostatico e piano deviatorico.

Il piano passante per l'origine ed ortogonale ad \mathbf{m} è detto 'piano deviatorico'. Tale piano contiene tutti gli stati tensionali caratterizzati dal primo invariante di tensione nullo, ovvero $\text{tr } \mathbf{T} = 0$ ed il nome deviatorico deriva dal fatto che il tensore \mathbf{T} può essere decomposto univocamente come somma della sua 'parte sferica' $\text{sph } \mathbf{T}$ e della sua 'parte deviatorica' $\text{dev } \mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \text{sph } \mathbf{T} + \text{dev } \mathbf{T} \quad \text{sph } \mathbf{T} = \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I} \quad \text{dev } \mathbf{T} = \mathbf{T} - \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I} \quad (2.274)$$

Si può facilmente mostrare che il legame elastico associa alla parte sferica di \mathbf{T} un tensore di deformazione idrostatico, caratterizzato da variazione di volume ma non di forma, ovvero da scorrimenti tutti nulli, ed alla parte deviatorica di \mathbf{T} un tensore di deformazione caratterizzato da variazione di volume nulla e quindi solo da variazione di forma.

Il piano deviatorico definisce stati tensionali per i quali la parte sferica è nulla per cui $\mathbf{T} = \text{dev } \mathbf{T}$.

Le intersezioni delle superfici di plasticizzazione con il piano deviatorico sono per il criterio di Tresca e di von Mises rispettivamente un esagono regolare ed un cerchio ad esso circoscritto. In figura 2.39 sono disegnate tali intersezioni ed indicati con σ'_1 , σ'_2 e σ'_3 le proiezioni sul piano deviatorico degli assi σ_1 , σ_2 e σ_3 .

Le intersezioni delle superfici di plasticizzazione con il piano $\sigma_3 = 0$ definiscono il dominio di plasticizzazione per il caso piano di tensione. Esse sono riportate in figura 2.40. Si può osservare dalle figure 2.39-2.40 che il criterio di Tresca opera a vantaggio di sicurezza rispetto a quello di von Mises in quanto un punto esterno all'esagono di Tresca ed interno all'ellisse di von Mises è un punto esterno al dominio elastico secondo Tresca ed interno secondo von Mises.

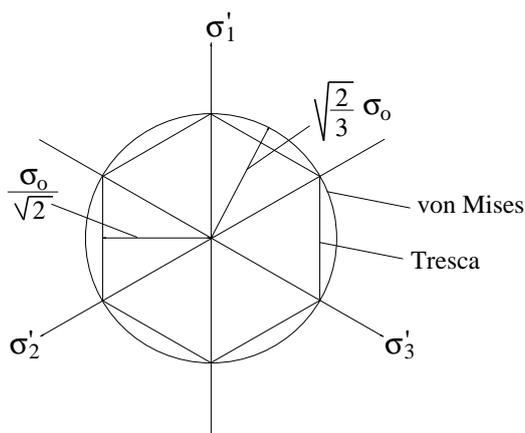


Figura 2.39: Intersezione delle superfici di plasticizzazione con il piano deviatorico.

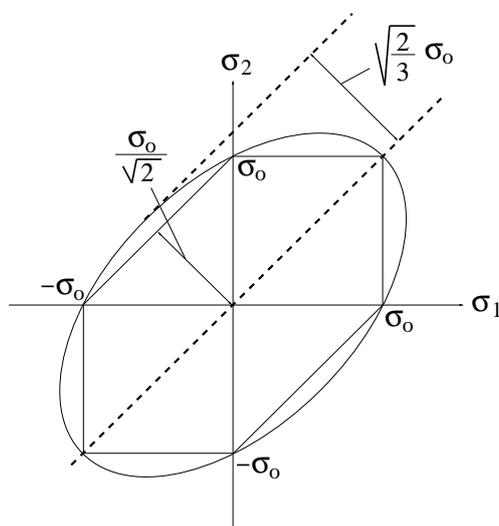


Figura 2.40: Intersezione delle superfici di plasticizzazione con il piano $\sigma_3 = 0$.

Il coefficiente di scurezza

Un ruolo importante in ogni calcolo ingegneristico, sia di progetto che di verifica, è giocato dai cosiddetti coefficienti di sicurezza. Nei riguardi del limite di plasticizzazione in un punto il coefficiente di sicurezza per un certo stato tensionale è dato dal fattore amplificativo (positivo) da applicare allo stato tensionale affinché si raggiunga il limite di plasticizzazione. Detto s tale coefficiente esso si calcola imponendo che risulti:

$$\sigma_{eq}(s \sigma_1, s \sigma_2, s \sigma_3) = s \sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = s \sigma_{eq} = \sigma_o \Rightarrow s = \frac{\sigma_o}{\sigma_{eq}} \quad (2.275)$$

Indicando con γ il coefficiente di sicurezza richiesto nel particolare caso in esame, e definendo tensione ammissibile σ_{am} il valore $\sigma_{am} = \sigma_o/\gamma$, si ricava che per avere un

coefficiente di sicurezza non minore di γ deve aversi:

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_{am} \quad (2.276)$$

La relazione (2.276) è alla base del cosiddetto metodo di verifica ‘delle tensioni ammissibili’.

Il coefficiente di sicurezza richiesto γ è sempre maggiore dell’unità e dipende da moltissimi fattori quali le incertezze sempre presenti riguardo l’effettiva resistenza dei materiali, l’entità delle azioni, le approssimazioni della modellazione matematica, il tipo di struttura in esame.

2.7.2 Il criterio della curva intrinseca

Il criterio della curva intrinseca è valido sia per i materiali duttili che per quelli fragili. Esso si basa sulla determinazione sperimentale di una curva limite nel riferimento di Mohr che delimita la parte del piano, alla sinistra di tale curva, contenente i cerchi di Mohr corrispondenti a stati elastici del materiale. La curva limite è anche detta ‘curva intrinseca’. Quando come in figura 2.41 i tre cerchi di Mohr sono tutti contenuti a sinistra della curva intrinseca lo stato tensionale è all’interno del dominio elastico. Quando, come in figura 2.42 il cerchio principale massimo contiene punti alla destra della curva intrinseca allora lo stato tensionale è all’esterno del dominio elastico. Quando infine, come in figura 2.43, il cerchio principale massimo è tangente alla curva lo stato tensionale si trova sulla frontiera del dominio elastico.

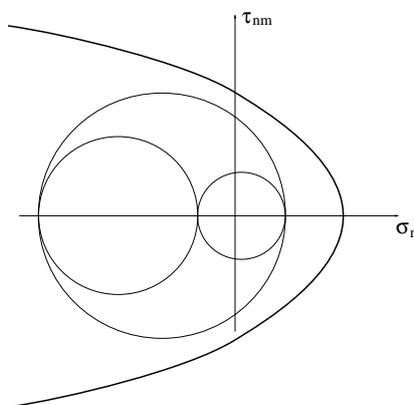


Figura 2.41: Stato tensionale interno al dominio elastico.

Il criterio della curva intrinseca presenta il vantaggio, rispetto ad altri criteri, di fornire delle indicazioni sulle giaciture sulle quali si è avuta la crisi. Tali giaciture infatti hanno le normali corrispondenti ai punti di tangenza del cerchio massimo con la curva intrinseca.

Si noti che quando la curva intrinseca degenera in due rette parallele equidistanti dall’asse delle ascisse (figura 2.44), gli stati tensionali elastici sono caratterizzati dall’aver il cerchio principale massimo contenuto tra le due rette e la condizione di tangenza si

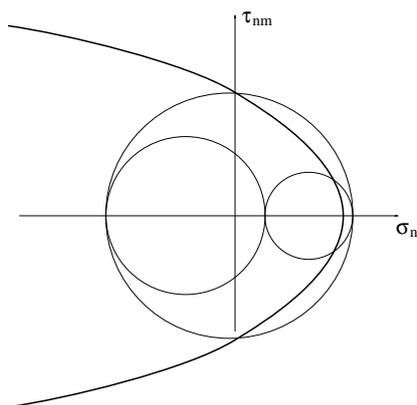


Figura 2.42: Stato tensionale esterno al dominio elastico.

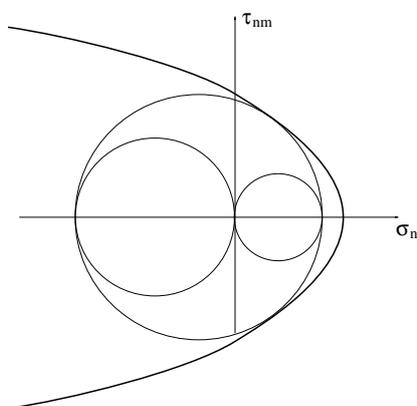


Figura 2.43: Stato tensionale sulla frontiera del dominio elastico.

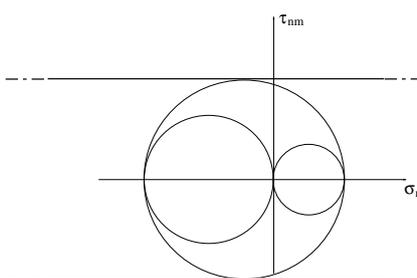


Figura 2.44: Curva intrinseca corrispondente al criterio di Tresca.

ottiene quanto il raggio del cerchio massimo è pari alla semidistanza fra le due rette. Si ottiene in questo caso il criterio di Tresca.

Capitolo 3

IL PROBLEMA DEL DE SAINT VENANT

3.1 Il problema del De Saint Venant

Il De Saint Venant ha ricavato la soluzione esatta del problema dell'equilibrio elastico, definito con il modello di continuo tridimensionale di Cauchy, per un particolare corpo avente la forma di un cilindro retto e sotto alcune ipotesi geometriche e meccaniche.

Tale soluzione è di estrema utilità nelle applicazioni in quanto, con buona approssimazione, essa consente di ricavare lo stato di tensione e di deformazione in ogni punto di una sezione retta di una trave una volta che le caratteristiche della sollecitazione su essa agenti sono state calcolate mediante la modellazione monodimensionale.

Nel seguito non si studierà l'intera soluzione esatta, in termini di spostamenti, deformazioni e tensioni, ricavata dal De Saint Venant. Si esporranno invece le ipotesi di base della teoria e si ricaveranno i risultati più importanti per le applicazioni meccaniche.

3.1.1 Ipotesi della teoria del De Saint Venant

Le ipotesi alla base della teoria del De Saint Venant sono di quattro tipi:

- Ipotesi geometriche:

La configurazione indeformata del solido definisce un cilindro retto. Si assumerà per esso un sistema di riferimento cartesiano con l'origine coincidente con il baricentro di una base, gli assi x ed y contenuti nel piano contenente tale base e l'asse z parallelo alle generatrici del cilindro. La lunghezza della trave, ovvero la distanza tra le basi, è assunta pari a L .

Le ipotesi geometriche sono schematizzate in figura 3.1. Il dominio occupato dal solido indeformato è indicato con Ω , ed il suo contorno $\partial\Omega$ può essere convenientemente suddiviso nella superficie laterale $\partial\Omega_l$, e nelle due basi $\partial\Omega_{b1}$ e $\partial\Omega_{b2}$. Il corpo è inoltre privo di vincoli.

- Ipotesi costitutive, cioè sul comportamento del materiale:

Il materiale è linearmente elastico, omogeneo ed isotropo.

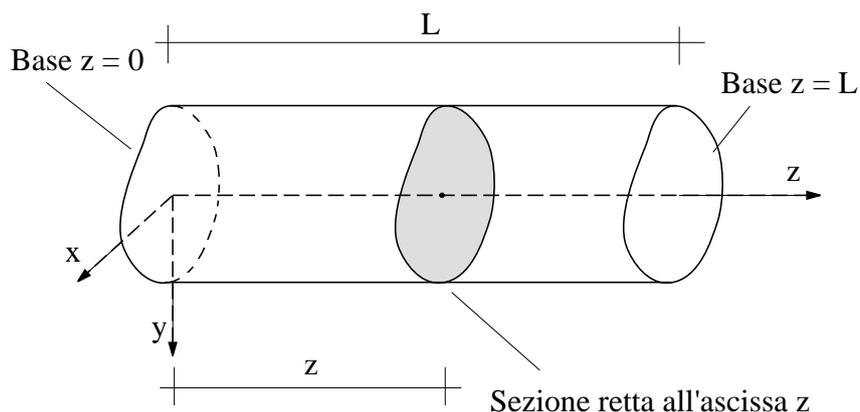


Figura 3.1: Geometria del solido 'trave'.

- Ipotesi sui carichi:

Le forze di volume sono nulle e la superficie laterale del cilindro è scarica. Il solido è dunque solamente caricato con una distribuzione di forze superficiali agenti sulle due basi che globalmente costituiscono un sistema equivalente a zero. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{p} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_l \end{aligned} \quad (3.1)$$

- Ipotesi sullo stato tensionale:

Le fibre longitudinali della trave, ovvero parallele all'asse z , si scambiano tra loro solamente tensioni tangenziali (figura 3.2).

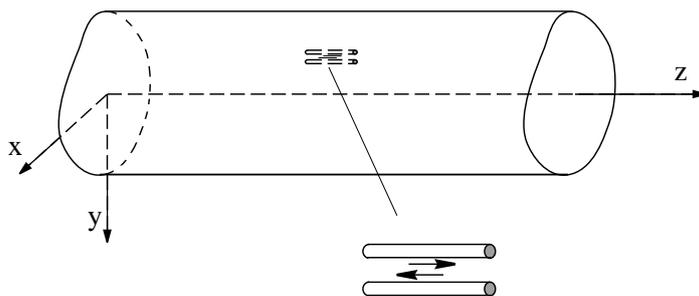


Figura 3.2: Le fibre longitudinali si scambiano solo tensioni tangenziali.

Indicando con \mathbf{n} la normale ad una qualsiasi giacitura tangente ad una di tali fibre, in un arbitrario punto interno alla trave, \mathbf{n} avrà in generale le prime due componenti diverse da zero e la terza nulla ($n_z = 0$). L'ipotesi sullo stato tensionale nel solido si traduce nell'affermare che su tale giacitura la tensione normale è nulla, ovvero:

$$\mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall \mathbf{n} : n_z = 0 \quad (3.2)$$

In componenti si ha¹:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2\tau_{yx} n_x n_y = 0 \quad \forall n_x, n_y \quad (3.3)$$

Dovendo la relazione precedente essere verificata, per ipotesi, per ogni n_x e per ogni n_y , ponendo $n_x = 1$ e $n_y = 0$ si ottiene che $\sigma_x = 0$. Ponendo poi $n_x = 0$ e $n_y = 1$ si ricava $\sigma_y = 0$. Scegliendo infine sia n_x che n_y diversi da zero si ottiene che $\tau_{yx} = 0$.

In definitiva l'ipotesi sullo stato tensionale si sintetizza in componenti nella relazione:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{yx} = 0 \quad (3.4)$$

Pertanto le uniche componenti non nulle della tensione sono le due componenti tangenziali τ_{zx} e τ_{zy} , e la componente normale σ_z . In ogni punto della trave, dunque, la matrice delle tensioni rispetto alla base del sistema di riferimento si scrive:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Lo stato tensionale è piano. Infatti, assegnata una qualsiasi normale \mathbf{n} , si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{n}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{zx} n_z \\ \tau_{zy} n_z \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{bmatrix} = \\ &= n_z \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ 0 \end{bmatrix} + (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \boldsymbol{\tau}_z + \beta \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.6)$$

avendo posto

$$\alpha = n_z \quad \beta = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \quad \boldsymbol{\tau}_z = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

¹Si noti che in seguito la simmetria della matrice delle tensioni viene utilizzata sostituendo τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} con τ_{yx} , τ_{zx} e τ_{zy} .

Pertanto, per ogni \mathbf{n} il vettore tensione $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ è combinazione lineare di \mathbf{k} e di $\boldsymbol{\tau}_z$ (figura 3.3).

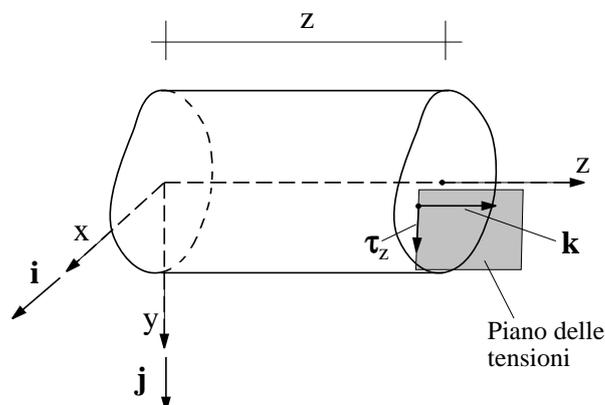


Figura 3.3: Piano delle tensioni in un punto della trave.

3.1.2 Stato tensionale sulla generica sezione retta

Si seziona la trave in due parti con un piano parallelo a xy , alla generica ascissa z , e si consideri la parte che va dalla base $z = 0$ all'ascissa z (figura 3.4). In ogni punto del sezionamento la normale uscente dalla parte considerata coincide con \mathbf{k} , ovvero con il versore dell'asse z .

Il vettore tensione agente nel generico punto della sezione retta sarà dunque dato da (figura 3.4):

$$\mathbf{t}(\mathbf{k}) = \mathbf{T} \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

e risulta la composizione della tensione normale σ_z , agente nella direzione \mathbf{k} , e della componente tangenziale, ovvero del vettore $\boldsymbol{\tau}_z$ introdotto nella (3.7):

$$\mathbf{t}(\mathbf{k}) = \sigma_z \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}_z \quad (3.9)$$

Si verifica, pertanto, che $\boldsymbol{\tau}_z$ e \mathbf{k} individuano il piano della tensione (figura 3.3).

Per calcolare le tensioni principali e disegnare i tre cerchi principali di Mohr, conviene adottare un nuovo sistema di riferimento x', y', z , ottenuto ruotando il sistema x, y, z intorno all'asse z in modo che y' sia parallelo ed equiverso a $\boldsymbol{\tau}_z$ (figura 3.5). Posto allora $\tau_z = \|\boldsymbol{\tau}_z\| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$, la matrice delle tensioni rispetto al riferimento x', y', z si indicherà con \mathbf{T}' ed è data da:

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_z \\ 0 & \tau_z & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

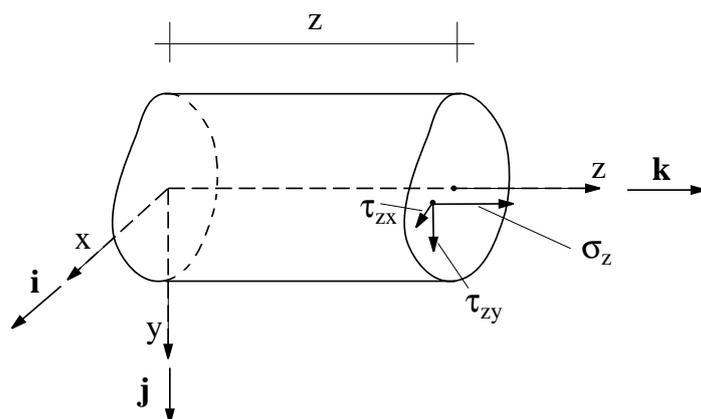


Figura 3.4: Vettore tensione in un punto della sezione retta.

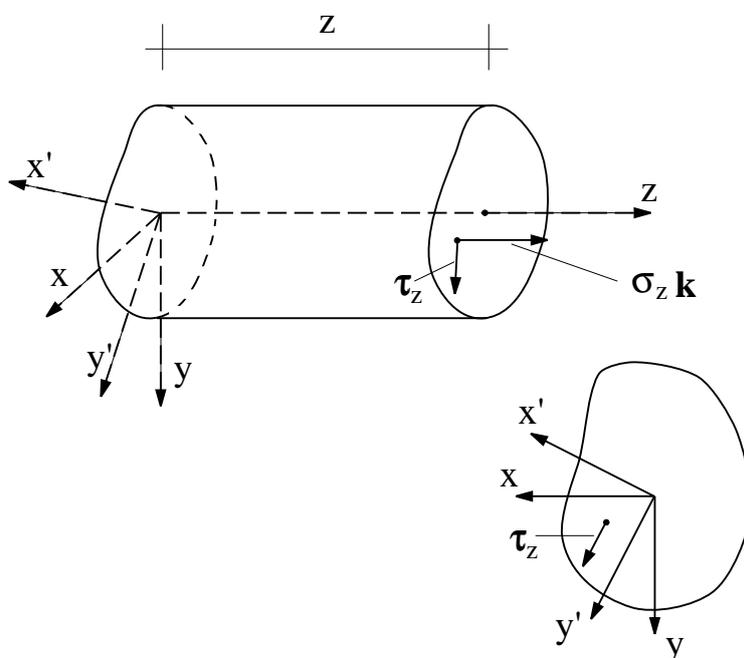


Figura 3.5: Sistema di riferimento x', y', z .

Si riconosce dunque che x' è una direzione principale a cui è associata una tensione principale nulla. Pertanto, un cerchio di Mohr principale si ottiene facendo variare le normali nel piano $y'z$, ovvero considerando le normali a tutte le giaciture parallele alla direzione principale x' , e quindi dal minore ottenuto dalla seconda e terza riga e dalla seconda e terza colonna di \mathbf{T}' , che si indicherà con \mathbf{T}'_{yz} :

$$\mathbf{T}'_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_z \\ \tau_z & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Si ottiene un cerchio di Mohr con centro di ascissa c e raggio R dati da:

$$c = \frac{0 + \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_z}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{0 - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_z^2} = \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_z^2} \quad (3.12)$$

Gli altri due cerchi di Mohr principali si ottengono tenendo conto della tensione principale $\sigma_{x'} = 0$. I tre cerchi principali ottenuti sono disegnati in figura 3.6.

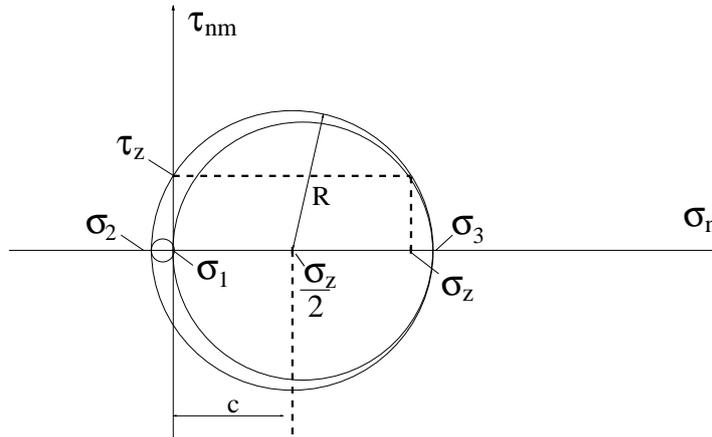


Figura 3.6: Cerchi principali di Mohr relativi allo stato tensionale in un punto della trave.

Le tre tensioni principali sono dunque:

$$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_z^2} \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_z^2} \quad (3.13)$$

Si lascia come esercizio la verifica che, adottando i criteri di Tresca e di von Mises, le tensioni equivalenti sono date rispettivamente da:

$$\text{Criterio di Tresca:} \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \quad (3.14)$$

$$\text{Criterio di von Mises:} \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2}$$

3.1.3 Equazioni di equilibrio interno

Essendo le forze di volume nulle ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), e tenendo conto delle (3.4), le equazioni differenziali di equilibrio interno si specializzano nelle seguenti relazioni:

$$\text{div } \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

La prime due di tali relazioni scalari rappresentano le equazioni di equilibrio alla traslazione lungo gli assi x e y del generico volume elementare del solido e possono anche scriversi:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_z}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

Esse si traducono nel fatto che il campo delle $\boldsymbol{\tau}_z$ non dipende da z , e dunque si ripete costantemente su ogni sezione retta della trave.

La terza equazione, che rappresenta l'equazione di equilibrio alla traslazione lungo l'asse z del generico volume elementare del solido, può anche scriversi:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_z = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad (3.17)$$

3.1.4 Condizioni di equilibrio sulla superficie laterale

Si ricorda che le condizioni di equilibrio sul contorno $\partial\Omega$ di un dominio Ω si scrivono:

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.18)$$

essendo \mathbf{p} le forze di superficie applicate.

Sulla superficie laterale del solido la normale ha la terza componente nulla ($n_z = 0$) ed inoltre si ha $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ in quanto le forze superficiali sulla superficie laterale sono nulle per ipotesi. Dunque, tenendo anche conto dell'espressione di \mathbf{T} , si ottiene:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Le prime due componenti della relazione vettoriale ottenuta rappresentano delle identità, mentre la terza può scriversi in modo più compatto:

$$\boldsymbol{\tau}_z \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.20)$$

Essa equivale ad affermare che le tensioni $\boldsymbol{\tau}_z$ agenti sul contorno della sezione retta devono essere tangenti al contorno stesso (figura 3.7).

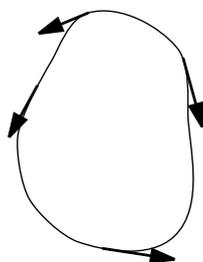


Figura 3.7: Sul contorno della sezione i vettori $\boldsymbol{\tau}_z$ risultano tangenti al contorno stesso.

3.1.5 Caratteristiche della sollecitazione

La risultante dei vettori tensione sulla sezione retta all'ascissa z considerata in precedenza è data da:

$$\mathbf{R}(z) = \int_A \mathbf{t}(\mathbf{k}) dA = \begin{bmatrix} \int_A \tau_{zx} dA \\ \int_A \tau_{zy} dA \\ \int_A \sigma_z dA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Le prime due componenti, ovvero T_x e T_y , sono le componenti dello sforzo di taglio \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \int_A \boldsymbol{\tau}_z dA = \begin{bmatrix} \int_A \tau_{zx} dA \\ \int_A \tau_{zy} dA \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

che dunque agisce nel piano della sezione. La terza componente, agente nella direzione dell'asse z , è lo sforzo normale:

$$N = \int_A \sigma_z dA \quad (3.23)$$

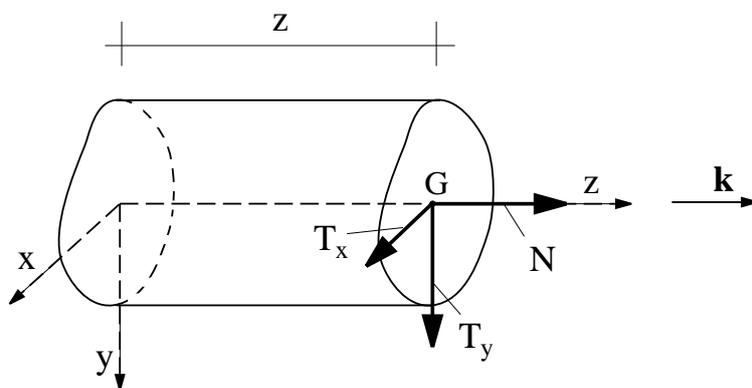


Figura 3.8: Risultante dei vettori tensione sulla sezione retta.

Il momento risultante rispetto al baricentro G della sezione retta, di posizione:

$$\mathbf{x}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

è dato da:

$$\mathbf{M}_G = \int_A [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \times \mathbf{t}(\mathbf{k})] dA \quad (3.25)$$

Si ha inoltre (figura 3.9):

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_G = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \times \mathbf{t}(\mathbf{k}) &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \\ &= (\sigma_z y) \mathbf{i} - (\sigma_z x) \mathbf{j} + (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \sigma_z y \\ -\sigma_z x \\ \tau_{zy} x - \tau_{zx} y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.27)$$

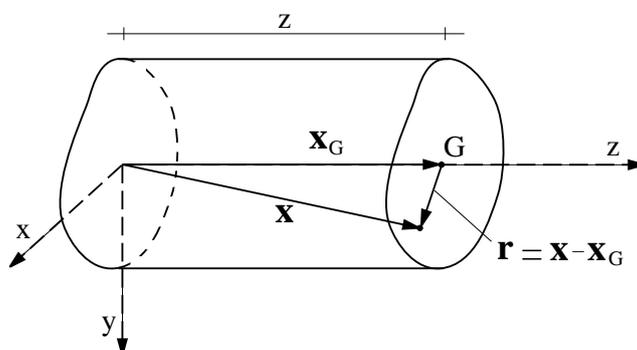


Figura 3.9: Vettore posizione rispetto al baricentro G della sezione retta.

Sostituendo la (3.27) nella (3.25), si ha:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad \text{con:} \quad \begin{cases} M_x = \int_A \sigma_z y dA \\ M_y = - \int_A \sigma_z x dA \\ M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA \end{cases} \quad (3.28)$$

Le prime due componenti sono associate alla sollecitazione di flessione, e rappresentano dunque le due componenti del ‘momento flettente’ \mathbf{M}_f , mentre la terza componente è associata alla sollecitazione di ‘torsione’, ed è dunque detta ‘momento torcente’ ed indicata anche con M_t :

$$\mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_t = M_z \quad (3.29)$$

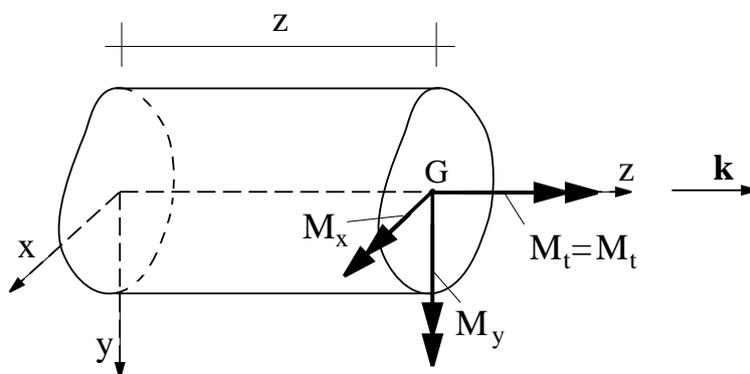


Figura 3.10: Momento risultante dei vettori tensione sulla sezione retta rispetto al baricentro G della sezione.

Riassumendo, le caratteristiche della sollecitazione agente sulla sezione sono rappresentate dallo sforzo normale N (che è uno scalare), dal momento flettente \mathbf{M}_f (che è un vettore parallelo al piano xy avente per componenti M_x e M_y), lo sforzo di taglio \mathbf{T} (che è un vettore parallelo al piano xy avente per componenti T_x e T_y) ed il momento

torcente M_t (che è uno scalare):

- Sforzo normale : $N = \int_A \sigma_z dA$
- Momento flettente : $\mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{bmatrix}$ con: $\begin{cases} M_x = \int_A \sigma_z y dA \\ M_y = - \int_A \sigma_z x dA \end{cases}$
- Taglio : $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ 0 \end{bmatrix}$ con: $\begin{cases} T_x = \int_A \tau_{zx} dA \\ T_y = \int_A \tau_{zy} dA \end{cases}$
- Momento torcente : $M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$

(3.30)

3.1.6 Postulato del De Saint Venant

La possibilità di usare i risultati della teoria del De Saint Venant per ricavare lo stato di tensione e di deformazione in ogni punto di una sezione retta di una trave una volta note le caratteristiche della sollecitazione è dovuta al seguente postulato:

Postulato 5 *Sistemi di forze staticamente equivalenti agenti sulle basi della trave producono, con ottima approssimazione, gli stessi effetti su tutta la lunghezza della trave, ad eccezione di zone di estensione limitata in prossimità delle basi stesse.*

La distanza lungo z dalle basi alla quale si ‘estinguono’ le differenze tra gli effetti di sistemi di forze staticamente equivalenti agenti sulle basi stesse è detta ‘distanza di estinzione’, e si indicherà con d_e . Per la maggior parte delle sezioni rette delle travi essa è circa pari alla dimensione massima della sezione retta stessa².

Si faccia riferimento alla figura 3.11 in cui è indicata una stessa trave soggetta sulle basi a tre sistemi diversi di forze autoequilibrati. Nel caso in figura, si assuma che su ciascuna base i tre sistemi di forze abbiano tutti risultante nulla e momento risultante uguale. In base al postulato di De Saint Venant, possono essere significative le differenze tra gli effetti (tensioni e deformazioni) nel punto P_1 posto ad una distanza dalla base sensibilmente minore della distanza di estinzione d_e . Viceversa, nel punto P_2 , posto ad una distanza sensibilmente maggiore di d_e , tali differenze possono assumersi trascurabili dal punto di vista ingegneristico³.

²Questo può non essere valido in alcuni casi che riguardano le sezioni sottili aperte.

³E’ utile sottolineare che una giusta interpretazione del postulato richiede una certa sensibilità ingegneristica e non può prescindere dal problema in esame.

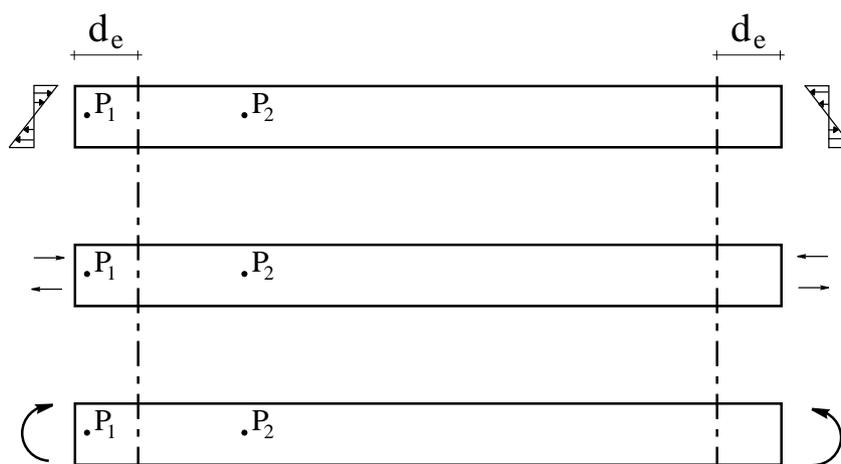


Figura 3.11: Postulato di De Saint Venant: sistemi di forze applicati sulle basi diversi ma staticamente equivalenti.

Si vedrà in seguito che la soluzione esatta della teoria del De Saint Venant prevede particolari distribuzioni di tensioni su ciascuna sezione retta e quindi anche di forze superficiali sulle basi. Dal postulato di De Saint Venant si deduce quindi che, laddove in alcuni problemi la distribuzione delle forze realmente applicate sulle basi differisce dalla soluzione esatta, la soluzione del De Saint Venant non può essere adottata come base per il progetto e la verifica della parte della struttura prossima alla base stessa e che gli effetti locali vanno accuratamente studiati con modellazioni matematiche e numeriche più raffinate eventualmente affiancate o sostituite da adeguate indagini sperimentali. Un'osservazione analoga vale per le zone delle travi in prossimità di forze e coppie concentrate.

3.2 Elementi di geometria delle aree

Si consideri un dominio connesso del piano, ovvero dello spazio euclideo bidimensionale, che rappresenta la sezione retta di una trave (figura 3.12). Sia A l'area della sezione e si assuma inoltre un'origine O nel piano ed un riferimento cartesiano $\{O, x, y\}$, in modo da individuare ogni suo punto mediante il vettore posizione \mathbf{r} rispetto all'origine, di componenti x e y . Siano inoltre $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ i versori degli assi x ed y .

3.2.1 Momento statico

Si definisce momento statico della sezione rispetto ad un punto Q , di posizione \mathbf{r}_Q e si indica con \mathbf{S}_Q , il seguente vettore:

$$\mathbf{S}_Q = \int_A (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) dA \quad (3.31)$$

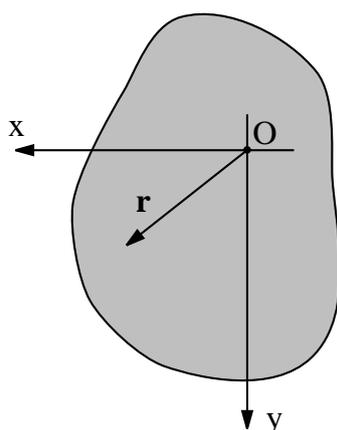


Figura 3.12: Sezione retta.

In componenti si ha:

$$\mathbf{S}_O = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A x \, dA \\ \int_A y \, dA \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

3.2.2 Baricentro

Si definisce baricentro della sezione, e si indica con G , l'unico punto della sezione rispetto a cui il momento statico è nullo. Da tale definizione, indicando con \mathbf{r}_G il vettore posizione di G , si ottiene:

$$\mathbf{S}_G = \mathbf{0} \Rightarrow \int_A (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \, dA = \int_A \mathbf{r} \, dA - \mathbf{r}_G \int_A dA = \mathbf{S}_O - \mathbf{r}_G A = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

dove \mathbf{S}_O indica, in base alla (3.31), il momento statico della sezione rispetto all'origine O . La posizione del baricentro è data dunque da:

$$\mathbf{r}_G = \frac{\mathbf{S}_O}{A} \quad (3.34)$$

La (3.34) può anche essere utilizzata per ricavare il momento statico rispetto ad O dell'area A , nota la posizione del baricentro G :

$$\mathbf{S}_O = \mathbf{r}_G A \quad (3.35)$$

3.2.3 Tensore e momenti d'inerzia

Si assuma l'origine coincidente con il baricentro della sezione. Si definisce tensore d'inerzia baricentrico, e si indica con \mathbf{J}_G , il tensore simmetrico:

$$\mathbf{J}_G = \int_A (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, dA \quad (3.36)$$

In componenti si ha:

$$\mathbf{J}_G = \int_A \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) dA = \int_A \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} J_{Gx} & J_{Gxy} \\ J_{Gxy} & J_{Gy} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

avendo posto:

$$J_{Gx} = \int_A x^2 dA \quad J_{Gy} = \int_A y^2 dA \quad J_{Gxy} = \int_A xy dA \quad (3.38)$$

I termini J_{Gx} e J_{Gy} sono i ‘momenti d’inerzia’ rispettivamente lungo x e y . Il termine J_{Gxy} è detto ‘momento d’inerzia centrifugo’.

Si definisce ‘momento d’inerzia polare’ rispetto al baricentro lo scalare J_{Gp} dato da:

$$J_{Gp} = \int_A \|\mathbf{r}\|^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA \quad (3.39)$$

Dalla definizione si ha:

$$J_{Gp} = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_{Gx} + J_{Gy} \quad (3.40)$$

Rotazione del riferimento

Si consideri ora un sistema di riferimento cartesiano con origine ancora in G ed assi x' ed y' ottenuti ruotando x ed y di un angolo α , assunto positivo se antiorario. Si indicherà inoltre con \mathbf{n} il versore dell’asse x' e con \mathbf{m} quello dell’asse y' . Le componenti di \mathbf{n} e \mathbf{m} rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ sono:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Dette x e y le coordinate di un punto P del piano rispetto al sistema $\{G, x, y\}$, le coordinate rispetto al sistema ruotato $\{G, x', y'\}$ sono date da:

$$x' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \quad y' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{m} \quad (3.42)$$

La matrice \mathbf{J}'_G associata al tensore d’inerzia rispetto al nuovo sistema di riferimento ha componenti

$$\mathbf{J}'_G = \begin{bmatrix} J_{Gn} & J_{Gnm} \\ J_{Gnm} & J_{Gm} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

dove:

$$J_{Gn} = \int_A x'^2 dA \quad J_{Gm} = \int_A y'^2 dA \quad J_{Gnm} = \int_A x' y' dA \quad (3.44)$$

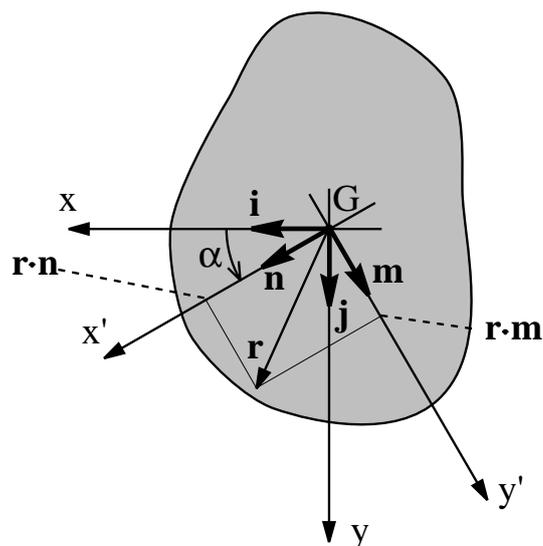


Figura 3.13: Sistema di riferimento ruotato.

Dalle formule del cambiamento di base si ha:

$$\mathbf{J}'_G = \mathbf{Q} \mathbf{J}_G \mathbf{Q}^t \quad (3.45)$$

dove la matrice \mathbf{Q} è data da:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Sostituendo nella (3.43) e svolgendo i passaggi si ottiene:

$$J_{Gn} = J_{Gx} \cos^2 \alpha + 2 J_{Gxy} \cos \alpha \sin \alpha + J_{Gy} \sin^2 \alpha \quad (3.47)$$

$$J_{Gnm} = (J_{Gy} - J_{Gx}) \sin \alpha \cos \alpha + J_{Gxy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

Si verifica facilmente che tali relazioni si possono scrivere come segue:

$$J_n = \mathbf{J}_G \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad (3.48)$$

$$J_{Gnm} = \mathbf{J}_G \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{J}_G \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}$$

Cerchio di Mohr

Le relazioni (3.48) sono analoghe alle seguenti altre:

$$\sigma_n = \mathbf{T}_{xy} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad \tau_{nm} = \mathbf{T}_{xy} \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \quad \text{con: } \mathbf{T}_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Queste ultime forniscono la componente normale σ_n in direzione \mathbf{n} e quella tangenziale τ_{nm} in direzione \mathbf{m} sulla giacitura di normale \mathbf{n} , quando la normale stessa ruota nel

piano xy . Tale analogia consente di applicare la teoria dei cerchi di Mohr al problema in esame senza doverla sviluppare di nuovo. In particolare, riportando in un riferimento cartesiano la componente J_{Gn} sulle ascisse e quella J_{Gnm} sulle ordinate, al ruotare del vettore \mathbf{n} il punto ottenuto descrive un cerchio, che ha centro nel punto di ascissa c ed ordinata nulla, e raggio R , con c ed R dati da (figura 3.14):

$$c = \frac{J_{Gx} + J_{Gy}}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{J_{Gx} - J_{Gy}}{2}\right)^2 + J_{Gxy}^2} \quad (3.50)$$

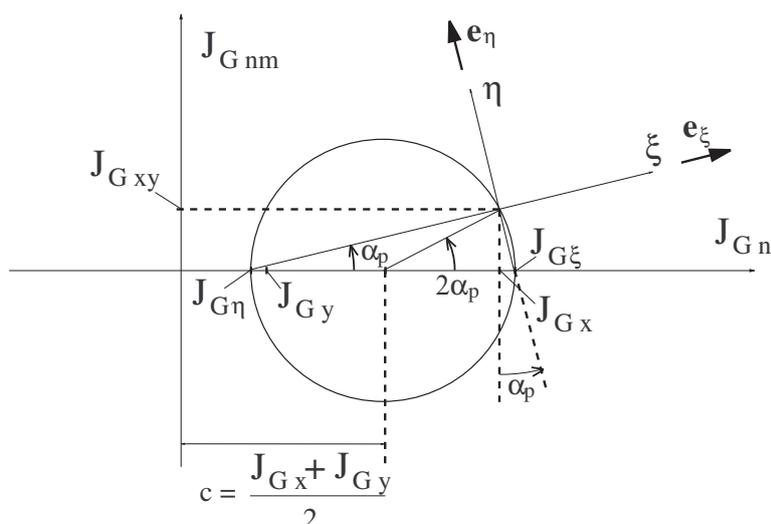


Figura 3.14: Determinazione grafica delle direzioni principali e dei momenti principali d'inerzia attraverso il Cerchio di Mohr.

Assi principali d'inerzia

Dalla costruzione del cerchio di Mohr si deduce che esiste un valore α_p dell'angolo α per cui si annulla il momento centrifugo J_{Gnm} . Poiché:

$$\begin{cases} J_{Gnm} = \mathbf{J}_G \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{J}_G \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \quad (3.51)$$

si deduce che il versore \mathbf{n} ruotato di α_p rispetto a x è un autovettore di \mathbf{J}_G . Analogamente si vede che il versore \mathbf{m} ruotato di α_p rispetto a y è anch'esso un autovettore di \mathbf{J}_G .

Il riferimento $\{G, \xi, \eta\}$ ruotato di α_p rispetto a $\{G, x, y\}$ è detto 'riferimento principale d'inerzia'. Le rette ξ ed η sono dette 'assi principali d'inerzia', le loro direzioni sono dette 'direzioni principali d'inerzia' ed i momenti $J_{G\xi}$ e $J_{G\eta}$ sono detti 'momenti principali d'inerzia'. Essendo nullo il momento centrifugo ($J_{G\xi\eta} = 0$), la matrice

d'inerzia \mathbf{J}_G^p rispetto al riferimento principale è diagonale:

$$\mathbf{J}_G^p = \begin{bmatrix} J_{G\xi} & 0 \\ 0 & J_{G\eta} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

I momenti principali d'inerzia rappresentano dunque gli autovalori del tensore d'inerzia e, attraverso la costruzione del cerchio di Mohr, si ottengono come intersezione del cerchio con l'asse delle ascisse. I corrispondenti autovettori definiscono le direzioni principali d'inerzia. Si noti che α_p è definito a meno di una rotazione di $\pi/2$. In altre parole, si può scegliere arbitrariamente di indicare una qualsiasi delle direzioni principali con ξ e l'altra con η . E' conveniente però orientare gli assi principali in modo che il riferimento $\{G, \xi, \eta\}$ sia levogiro⁴.

Scegliendo ad esempio di indicare con $J_{G\xi}$ il più grande dei due momenti principali si ottiene:

$$J_{G\xi} = \frac{J_{Gx} + J_{Gy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{Gx} - J_{Gy}}{2}\right)^2 + J_{Gxy}^2}$$

$$J_{G\eta} = \frac{J_{Gx} + J_{Gy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{Gx} - J_{Gy}}{2}\right)^2 + J_{Gxy}^2} \quad (3.53)$$

In generale, utilizzando la procedura grafica che fornisce la corrispondenza tra le direzioni n ed i punti sul cerchio di Mohr, già vista per il caso delle tensioni, per ottenere la corrispondenza tra assi principali e momenti principali d'inerzia si utilizza la seguente costruzione:

- Arbitrariamente si pone uno di momenti principali pari a $J_{G\xi}$ e l'altro pari a $J_{G\eta}$. Dal polo P del cerchio, che come si è visto ha coordinate (J_{Gx}, J_{Gxy}) , si tracciano le due rette passanti per i punti di ascissa $J_{G\xi}$ e $J_{G\eta}$ ed ordinata nulla. L'asse passante per il punto di ascissa $J_{G\eta}$ è l'asse ξ , mentre quello passante per il punto di ascissa $J_{G\xi}$ è l'asse η . Gli assi vengono poi orientati in modo che ξ debba ruotare di 90° in senso antiorario per sovrapporsi a η .

In questo caso, come si è detto in precedenza, in figura 3.14 si è scelto di indicare con $J_{G\xi}$ il più grande tra i momenti d'inerzia.

Per verificare la validità della costruzione nel caso dell'asse ξ basta osservare che la procedura generale, dimostrata nel caso delle tensioni, richiede come prima operazione di tracciare per il punto di ascissa $J_{G\xi}$ ed ordinata nulla una retta orizzontale ed individuare l'intersezione di questa con il cerchio. In questo caso tale intersezione è il punto di ascissa $J_{G\eta}$ ed ordinata nulla. Da tale punto bisogna quindi tracciare una retta passante per il polo P . La direzione di quest'ultima retta individua la direzione associata al punto di ascissa $J_{G\xi}$ ed ordinata nulla. In definitiva tale procedura ci dice che la direzione di ξ è quella della retta congiungente il punto di ascissa $J_{G\eta}$ ed ordinata nulla con il polo P .

⁴Sarebbe possibile definire un riferimento principale destrorso, partendo inizialmente da un riferimento non principale levogiro, ma bisognerebbe poi fare estrema attenzione ai segni nella scrittura di molte relazioni. Per questo motivo conviene evitare tale complicazione.

Per individuare l'angolo α_p che l'asse ξ forma con l'asse x si osservi che, nella figura 3.14, il versore positivo \mathbf{e}_ξ della direzione ξ ha componenti:

$$\mathbf{e}_\xi = \begin{bmatrix} \cos \alpha_p \\ \sin \alpha_p \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Ma essendo \mathbf{e}_ξ un autovettore di \mathbf{J}_G esso è una soluzione del problema:

$$\begin{bmatrix} J_{Gx} - J_{G\xi} & J_{Gxy} \\ J_{Gxy} & J_{Gy} - J_{G\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Essendo $J_{G\xi}$ un autovalore di \mathbf{J}_G il determinante della matrice è nullo e dunque le due righe sono linearmente indipendenti. Per calcolare a_1 ed a_2 basta quindi risolvere una qualunque delle due equazioni scalari ottenute dalla (3.55). Utilizzando la prima si ha:

$$(J_{Gx} - J_{G\xi}) a_1 + J_{Gxy} a_2 = 0 \quad (3.56)$$

da cui:

$$\tan \alpha_p = \frac{a_2}{a_1} = \frac{J_{G\xi} - J_{Gx}}{J_{Gxy}} \quad (3.57)$$

E' utile osservare che, se $J_{G\xi} = J_{G\eta}$, il cerchio di Mohr degenera in un punto, per cui tutte le direzioni sono principali d'inerzia e tutti i momenti d'inerzia lungo tutti gli assi baricentrici sono uguali. Questo è il caso importante delle sezioni dotate di più di due assi di simmetria, quali ad esempio quelle circolari e quadrate.

Assi di simmetria

Si dimostra che se una sezione ammette un asse di simmetria, allora tale asse contiene il baricentro ed è anche un asse principale d'inerzia. L'asse baricentrico ortogonale all'asse di simmetria risulta dunque anch'esso principale d'inerzia.

Da ciò si deducono anche le seguenti due proprietà:

- se la sezione ammette due assi di simmetria allora la loro intersezione ne individua il baricentro ed entrambi gli assi di simmetria sono assi principali d'inerzia;
- se la sezione ammette più di due assi di simmetria tutti gli assi baricentrici sono principali d'inerzia, e dunque il cerchio di Mohr degenera in un punto e tutti i momenti d'inerzia lungo qualsiasi asse baricentrico sono uguali. E' questo il caso importante delle sezioni circolari o a corona circolare e delle sezioni quadrate.

Teorema del trasporto

Si assuma un'origine O non coincidente con il baricentro G . Si indichi con \mathbf{r} il vettore posizione di un generico punto rispetto a O , con \mathbf{r}^* il vettore posizione rispetto al baricentro G e con \mathbf{r}_G il vettore posizione del baricentro rispetto a O (figura 3.15):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}^* \quad (3.58)$$

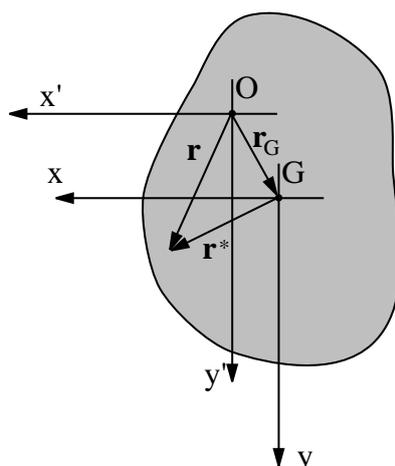


Figura 3.15: Teorema del trasporto.

Il tensore d'inerzia \mathbf{J}_O rispetto a O è dato da:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_O &= \int_A (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dA = \int_A [(\mathbf{r}_G + \mathbf{r}^*) \otimes (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}^*)] dA = \\ &= \int_A (\mathbf{r}^* \otimes \mathbf{r}^*) dA + \mathbf{r}_G \otimes \int_A \mathbf{r}^* dA + \int_A \mathbf{r}^* dA \otimes \mathbf{r}_G + \int_A dA \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G = \\ &= \mathbf{J}_G + \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{S}_G + \mathbf{S}_G \otimes \mathbf{r}_G + A \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G \end{aligned} \quad (3.59)$$

Poiché il vettore \mathbf{S}_G rappresenta il momento statico della sezione rispetto al baricentro, esso è nullo per definizione. Dunque si ottiene la relazione:

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_G + A \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G \quad (3.60)$$

Il risultato espresso dalla (3.60) è noto come 'teorema del trasporto'. In base ad esso, il tensore d'inerzia rispetto ad un punto O non coincidente con il baricentro, si ottiene come somma del tensore d'inerzia baricentrico e del tensore d'inerzia rispetto ad O calcolato supponendo tutta l'area concentrata nel baricentro.

Detti x ed y gli assi del sistema di riferimento con origine in G , e x' ed y' quelli del sistema di riferimento con origine in O , in componenti la (3.60) fornisce:

$$J_{Ox'} = J_{Gx} + A x^2 \quad J_{Oy'} = J_{Gy} + A y^2 \quad J_{Ox'y'} = J_{Gxy} + A x y \quad (3.61)$$

Alcune osservazioni sulle convenzioni adottate

E' utile sottolineare che la notazione adottata è stata scelta per potere utilizzare in modo più naturale un approccio di tipo tensoriale per il calcolo delle caratteristiche inerziali di una sezione. In molte trattazioni si utilizza una diversa notazione, secondo la quale,

data una retta orientata a del piano, si indica con I_a il cosiddetto momento d'inerzia intorno ad a :

$$I_a = \int_A d_a^2 dA \quad (3.62)$$

dove d_a indica la distanza del generico punto dalla retta a , assunta positiva se percorrendo la retta a nel suo verso positivo il punto si trova alla sinistra di a (figura 3.16).

Data una seconda retta orientata b , viene detto momento centrifugo I_{ab} lo scalare:

$$I_{ab} = \int_A d_a d_b dA \quad (3.63)$$

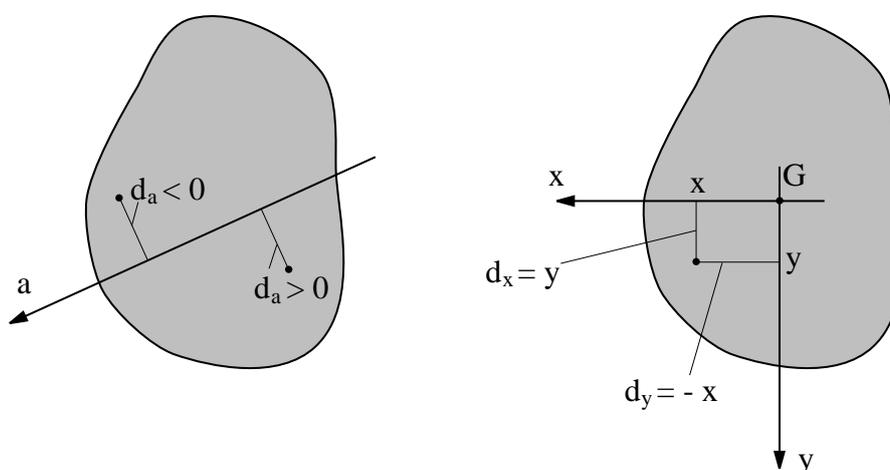


Figura 3.16: Distanza orientata da una retta.

Con riferimento agli assi baricentrici x e y in figura 3.16, per passare da una notazione all'altra bisogna considerare che $d_x = y$ e $d_y = -x$. Pertanto le relazioni tra i momenti d'inerzia lungo x e y , ovvero J_{Gx} e J_{Gy} , e quelli intorno a x e y , ovvero I_{Gx} e I_{Gy} , nonché quelle tra i momenti centrifughi J_{Gxy} e I_{Gxy} si ottengono da:

$$\begin{aligned} J_{Gx} &= \int_A x^2 dA = \int_A d_y^2 dA = I_{Gy} \\ J_{Gy} &= \int_A y^2 dA = \int_A d_x^2 dA = I_{Gx} \\ J_{Gxy} &= \int_A x y dA = - \int_A d_x d_y dA = -I_{Gxy} \end{aligned} \quad (3.64)$$

ovvero in sintesi:

$$I_{Gx} = J_{Gy} \quad I_{Gy} = J_{Gx} \quad I_{Gxy} = -J_{Gxy} \quad (3.65)$$

3.2.4 Ellisse d'inerzia

Si assuma l'origine coincidente con il baricentro della sezione. Si definisce 'ellisse centrale d'inerzia', o anche semplicemente 'ellisse d'inerzia', l'ellisse di equazione:

$$A \mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1 \quad (3.66)$$

Se si assume un riferimento con gli assi x ed y coincidenti con gli assi principali d'inerzia ξ ed η si ha:

$$\mathbf{J}_G = \begin{bmatrix} J_{Gx} & 0 \\ 0 & J_{Gy} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

e dunque:

$$\mathbf{J}_G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{Gx}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_{Gy}} \end{bmatrix} \Rightarrow A \mathbf{J}_G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A}{J_{Gx}} & 0 \\ 0 & \frac{A}{J_{Gy}} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Si definiscono 'raggi d'inerzia' ρ_x ed ρ_y gli scalari⁵:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_{Gx}}{A}} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{J_{Gy}}{A}} \quad (3.69)$$

Pertanto, in un riferimento principale l'equazione dell'ellisse centrale d'inerzia è data da:

$$A \mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \quad (3.70)$$

e quindi assume la 'forma canonica':

$$\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} = 1 \quad (3.71)$$

I raggi d'inerzia ρ_x e ρ_y rappresentano dunque i semiassi dell'ellisse d'inerzia (figura 3.17).

Se $J_x = J_y = J$, allora $\rho_x = \rho_y = \rho$ e l'ellisse d'inerzia è un cerchio di raggio ρ .

⁵In molti testi, si assume:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_{Gx}}{A}} = \sqrt{\frac{J_{Gy}}{A}} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{I_{Gy}}{A}} = \sqrt{\frac{J_{Gx}}{A}}$$

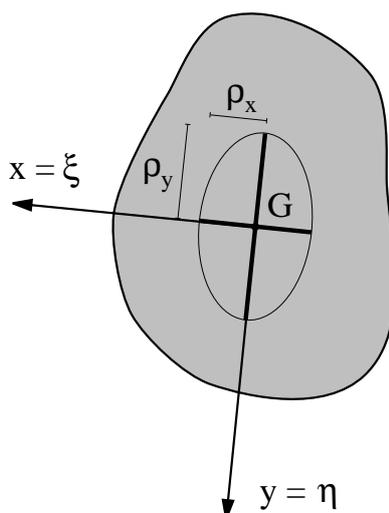


Figura 3.17: Ellisse d'inerzia.

Direzioni coniugate

Due versori \mathbf{n} e \mathbf{s} individuano due 'direzioni coniugate' rispetto all'ellisse d'inerzia se si ha:

$$\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (3.72)$$

E' ovvio che se le direzioni definite da \mathbf{n} e \mathbf{s} sono coniugate rispetto all'ellisse d'inerzia, allora anche quelle associate alle coppie $\{-\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$, $\{\mathbf{n}, -\mathbf{s}\}$ e $\{-\mathbf{n}, -\mathbf{s}\}$ lo sono.

E' facile vedere che se l'ellisse d'inerzia è un cerchio allora tutte le direzioni coniugate sono ortogonali tra loro, mentre se $\rho_x \neq \rho_y$, le uniche direzioni coniugate che risultano anche ortogonali tra loro sono quelle principali d'inerzia.

Due rette baricentriche parallele a due direzioni coniugate si dicono 'assi coniugati' rispetto all'ellisse d'inerzia.

Assegnato una retta s baricentrica, si dimostra che l'asse n coniugato di s rispetto all'ellisse d'inerzia è la retta passante per G parallela alle due tangenti n_1 ed n_2 all'ellisse nei punti d'intersezione S_1 e S_2 di s con l'ellisse (figura 3.18).

Antipolarità rispetto all'ellisse d'inerzia

Assegnato un punto C del piano, di posizione \mathbf{r}_C , si definisce 'antipolare' di C rispetto all'ellisse d'inerzia la retta di equazione:

$$A \mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{r}_C \cdot \mathbf{r} + 1 = 0 \quad (3.73)$$

ed il punto C è detto 'antipolo' della retta di equazione (3.73).

Si lascia come esercizio la verifica che, in un riferimento principale xy , l'equazione (3.73) si scrive:

$$\frac{x_C x}{\rho_x^2} + \frac{y_C y}{\rho_y^2} + 1 = 0 \quad (3.74)$$

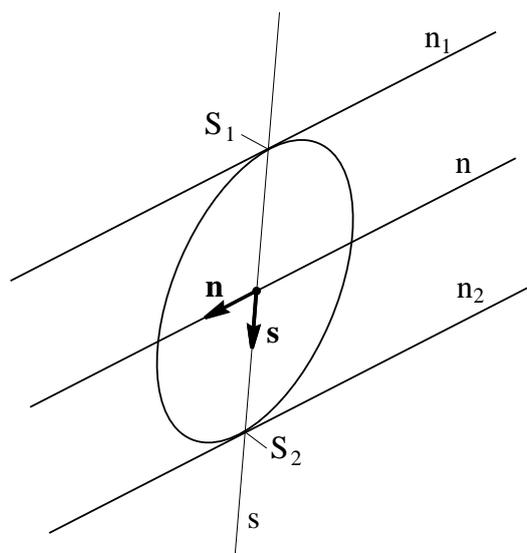


Figura 3.18: Rispetto all'ellisse d'inerzia s e n definiscono due direzioni coniugate mentre s ed n sono due assi coniugati.

Le intersezioni con gli assi si ottengono ponendo alternativamente $x = 0$ e $y = 0$ nella (3.74):

$$x = 0 \Rightarrow y_C y = -\rho_y^2 \quad y = 0 \Rightarrow x_C x = -\rho_x^2 \quad (3.75)$$

Sfruttando la relazione $ab = h^2$ relativa al triangolo rettangolo di figura 3.19, si ricava la costruzione grafica riportata in figura 3.20 per la determinazione dell'antipolare n di un punto C del piano. Da quest'ultima si deduce che l'asse neutro si trova sempre dalla parte opposta di C rispetto a G .

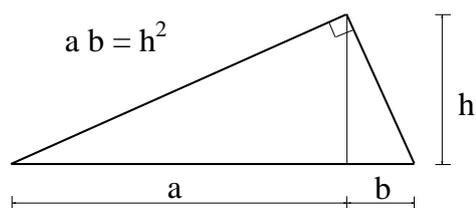


Figura 3.19: Relazione tra i cateti a e b e l'altezza h sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

3.2.5 Caratteristiche inerziali di alcune sezioni

Sezione rettangolare

Si consideri la sezione rettangolare in figura 3.21, di base b ed altezza h . Gli assi x e y in figura sono di simmetria e dunque sono principali d'inerzia. La loro intersezione

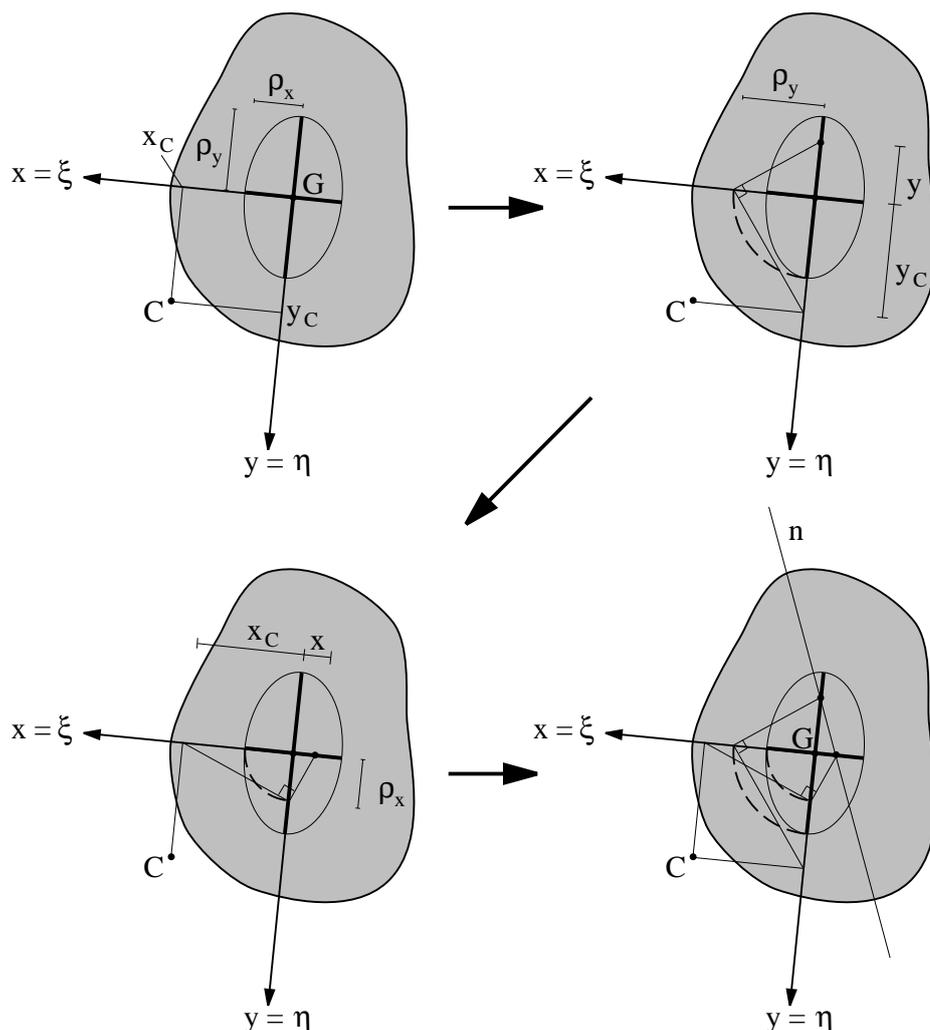


Figura 3.20: Costruzione grafica per la determinazione dell'antipolare n di un punto C del piano rispetto all'ellisse d'inerzia.

definisce il baricentro G . Si lascia come esercizio la verifica che la matrice associata al tensore d'inerzia, rispetto al sistema adottato in figura, è la seguente:

$$\mathbf{J}_G = \begin{bmatrix} \frac{h b^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{b h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

I raggi d'inerzia sono dati da:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_{Gx}}{A}} = \sqrt{\frac{h b^3}{12} \cdot \frac{1}{b h}} = \frac{b}{\sqrt{12}} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{J_{Gy}}{A}} = \sqrt{\frac{b h^3}{12} \cdot \frac{1}{b h}} = \frac{h}{\sqrt{12}} \quad (3.77)$$

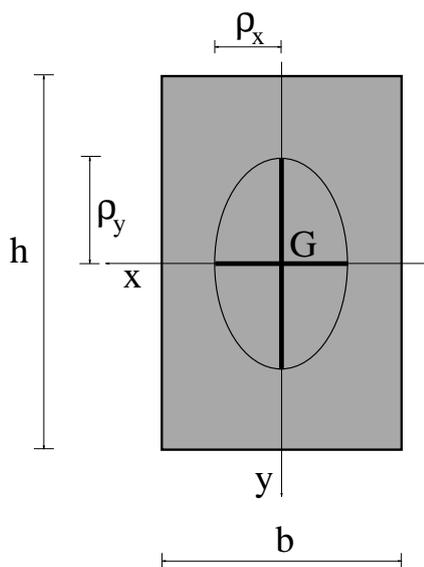


Figura 3.21: Sezione rettangolare.

Sezione circolare

Si consideri la sezione circolare in figura 3.22 di raggio R . Il suo centro ne è ovviamente il baricentro G , e tutte le rette per G sono assi di simmetria per cui si ha:

$$J_{Gx} = J_{Gy} = J \quad (3.78)$$

Conviene calcolare allora il momento polare J_{Gp} . Ponendo $r = \|\mathbf{r}\|$ e $dA = 2\pi r dr$:

$$J_{Gp} = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr \quad (3.79)$$

da cui:

$$J_{Gp} = \frac{\pi R^4}{2} \quad (3.80)$$

Essendo poi:

$$J_{Gp} = J_{Gx} + J_{Gy} = 2J \quad (3.81)$$

si ricava il valore del momento d'inerzia lungo qualsiasi asse baricentrico:

$$J = \frac{\pi R^4}{4} \quad (3.82)$$

L'ellisse d'inerzia per una sezione circolare è un cerchio di raggio ρ dato da:

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{\pi R^4}{4} \cdot \frac{1}{\pi R^2}} = \frac{R}{2} \quad (3.83)$$

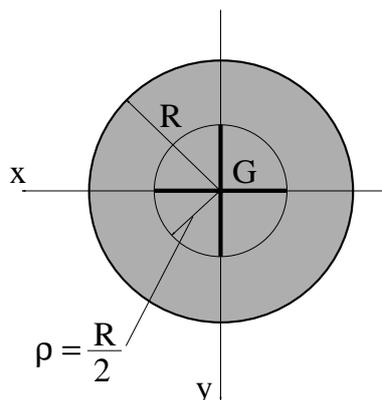


Figura 3.22: Sezione circolare.

Sezione a corona circolare

Si consideri la sezione a corona circolare in figura 3.23, di raggio interno R_i e raggio esterno R_e . Anche in questo caso il suo centro ne è ovviamente il baricentro G e tutte le rette per G sono assi di simmetria per cui si ha:

$$J_{Gx} = J_{Gy} = J \quad (3.84)$$

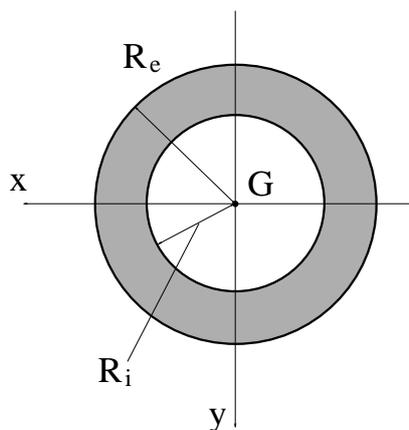


Figura 3.23: Sezione a corona circolare.

Indicando con J_{piena} il momento d'inerzia della sezione circolare piena di raggio R_e e con J_{foro} il momento d'inerzia della sezione circolare piena di raggio R_i , per l'additività degli integrali si ha:

$$J_{piena} = \frac{\pi R_e^4}{4} \quad J_{foro} = \frac{\pi R_i^4}{4} \quad J_{piena} = J_{foro} + J \quad (3.85)$$

da cui:

$$J = \pi \frac{R_e^4 - R_i^4}{4} \quad (3.86)$$

Sezione a corona circolare sottile

Posto $\delta = \mathfrak{R}_e - \mathfrak{R}_i$, una sezione a corona circolare si dice sottile se $\delta \ll (\mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_i)/2$. In tal caso si lascia per esercizio la verifica dei seguenti risultati:

$$J = \pi R^3 \delta \quad \rho = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (3.87)$$

Sezione a doppia T

Si consideri la sezione 'a doppia T' in figura 3.24. Avendo la sezione due assi di simmetria x ed y , essi sono anche principali d'inerzia e la loro intersezione individua il baricentro G .

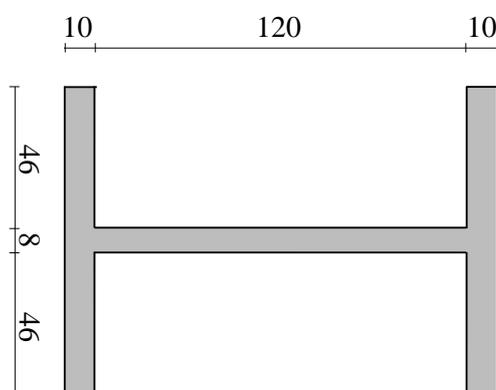


Figura 3.24: Sezione a doppia T: geometria (dimensioni espresse in mm).

Per ricavare il tensore d'inerzia si decompone la sezione in tre rettangoli, di area A_1 , A_2 ed A_3 , come indicato in figura 3.25. Per l'additività dell'integrale, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_G &= \int_A (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dA = \int_{A_1} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dA + \int_{A_2} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dA + \int_{A_3} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dA = \\ &= \mathbf{J}_G^{(1)} + \mathbf{J}_G^{(2)} + \mathbf{J}_G^{(3)} \end{aligned} \quad (3.88)$$

avendo indicato con $\mathbf{J}_G^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, il tensore d'inerzia dell' i -esimo rettangolo rispetto a G . Bisogna però osservare che i baricentri G_1 e G_2 del primo e del secondo rettangolo sono diversi dal baricentro G dell'intera sezione, mentre $G_3 = G$. Pertanto, $\mathbf{J}_G^{(1)}$ e $\mathbf{J}_G^{(2)}$ rappresentano i tensori d'inerzia dei primi due rettangoli rispetto ad un punto che non coincide con il baricentro, e dunque per la loro determinazione bisogna utilizzare il teorema del trasporto, ovvero la formula (3.60).

Si consideri ad esempio il primo rettangolo. Per l'applicazione della (3.60) si nota che $\mathbf{J}_G^{(1)}$ rappresenta il tensore d'inerzia rispetto a G del primo rettangolo, avente per baricentro G_1 . Dunque, nella formula (3.60) bisogna sostituire O con G e G con G_1 .

Si ha:

$$\mathbf{J}_{G_1}^{(1)} = \mathbf{J}_{G_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{10 \cdot 100^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{100 \cdot 10^3}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.33 \text{ E } 5 & \\ & 0 \quad 8.33 \text{ E } 3 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{J}_{G_3}^{(3)} = \mathbf{J}_G^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{120 \cdot 8^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{8 \cdot 120^3}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.12 \text{ E } 3 & \\ & 0 \quad 1.152 \text{ E } 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 65 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -65 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{G_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$A_1 = A_2 = 10 \cdot 100 = 1000 \quad A_3 = 8 \cdot 120 = 960 \quad (3.91)$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_G^{(1)} = \mathbf{J}_G^{(2)} = \mathbf{J}_{G_1}^{(1)} + A_1 \mathbf{r}_{G_1} \otimes \mathbf{r}_{G_1} &= \begin{bmatrix} 8.33 \text{ E } 5 & 0 \\ 0 & 8.33 \text{ E } 3 \end{bmatrix} + 1000 \begin{bmatrix} 0 \\ 65 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 65 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 8.33 \text{ E } 5 & 0 \\ 0 & 8.33 \text{ E } 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4.225 \text{ E } 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.33 \text{ E } 5 & 0 \\ 0 & 4.233 \text{ E } 6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_G = \mathbf{J}_G^{(1)} + \mathbf{J}_G^{(2)} + \mathbf{J}_G^{(3)} &= 2 \begin{bmatrix} 8.33 \text{ E } 5 & 0 \\ 0 & 4.233 \text{ E } 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.12 \text{ E } 3 & \\ & 0 \quad 1.152 \text{ E } 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1.67 \text{ E } 6 & 0 \\ 0 & 9.61 \text{ E } 6 \end{bmatrix} \quad (mm^4) \end{aligned} \quad (3.93)$$

In componenti ed in cm si ha:

$$J_{G_x} = 167 \text{ cm}^4 \quad J_{G_y} = 961 \text{ cm}^4 \quad J_{G_{xy}} = 0 \quad (3.94)$$

Essendo $A = A_1 + A_2 + A_3 = 2960 \text{ mm}^2$, i raggi d'inerzia sono dunque:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{1.67 \text{ E } 6}{2960}} = 24 \text{ mm} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{9.61 \text{ E } 6}{2960}} = 57 \text{ mm} \quad (3.95)$$

L'ellisse d'inerzia è riportata in figura 3.26.

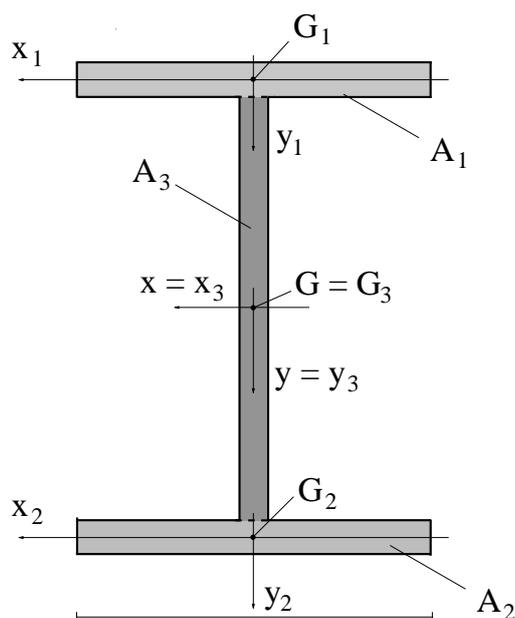


Figura 3.25: Sezione a doppia T: suddivisione in rettangoli per il calcolo delle caratteristiche inerziali.

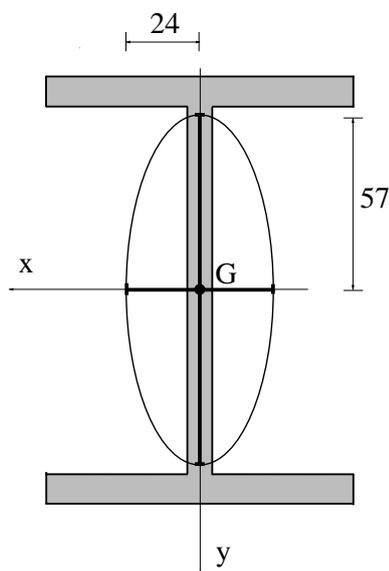


Figura 3.26: Sezione a doppia T: ellisse d'inerzia.

Sezione a L

Si consideri la sezione a L di figura 3.27. Non presentando la sezione assi di simmetria bisogna innanzitutto determinare la posizione del baricentro. A tale scopo, si sceglie arbitrariamente un sistema di riferimento $\{O, x', y'\}$ e si suddivide l'area in due rettangoli

come indicato in figura 3.28.

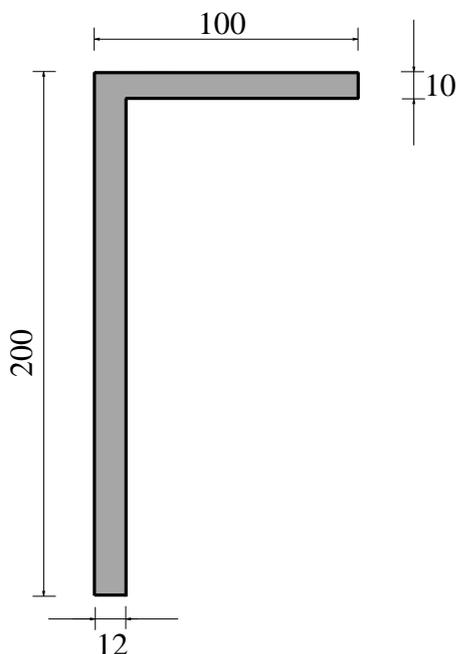


Figura 3.27: Sezione a L.

Per l'additività dei momenti statici si ha:

$$\mathbf{S}_O = \int_A \mathbf{r}' dA = \int_{A_1} \mathbf{r}' dA + \int_{A_2} \mathbf{r}' dA = \mathbf{S}_O^{(1)} + \mathbf{S}_O^{(2)} \quad (3.96)$$

Inoltre, dalla (3.35) si ricava:

$$\mathbf{S}_O^{(i)} = \mathbf{r}'_{G_i} A_i \quad (3.97)$$

Pertanto, utilizzando la (3.34):

$$\mathbf{r}'_G = \frac{\mathbf{S}_O}{A} = \frac{\mathbf{S}_O^{(1)} + \mathbf{S}_O^{(2)}}{A_1 + A_2} \quad (3.98)$$

si ricava che il baricentro si determina come media pesata delle posizioni dei baricentri dei rettangoli che compongono la sezione, utilizzando come pesi le aree⁶:

$$\mathbf{r}'_G = \frac{\mathbf{r}'_{G_1} A_1 + \mathbf{r}'_{G_2} A_2}{A_1 + A_2} \quad (3.99)$$

Nel caso in esame si ricava:

$$A_1 = 1000 \quad A_2 = 2280 \quad A = A_1 + A_2 = 3280 \quad (3.100)$$

⁶Per tale motivo il baricentro si trova necessariamente sulla congiungente G_1 e G_2 .

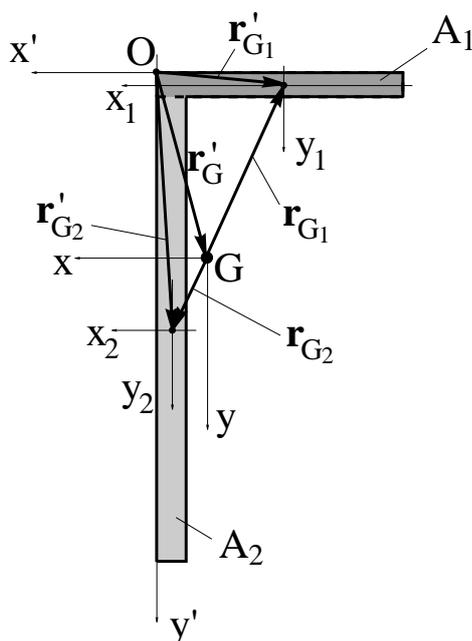


Figura 3.28: Sezione a L: suddivisione in rettangoli.

$$\mathbf{r}'_{G_1} = \begin{bmatrix} -50 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}'_{G_2} = \begin{bmatrix} -6 \\ 105 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$\mathbf{r}'_G = \frac{1}{3280} \left(1000 \cdot \begin{bmatrix} -50 \\ 5 \end{bmatrix} + 2280 \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 105 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -19.41 \\ 74.51 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Si consideri ora il sistema di riferimento con origine nel baricentro $\{G, x, y\}$. Rispetto ad esso le posizioni dei baricentri G_1 e G_2 sono date da:

$$\mathbf{r}_{G_1} = \mathbf{r}'_{G_1} - \mathbf{r}'_G = \begin{bmatrix} -50 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -19.41 \\ 74.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30.59 \\ -69.51 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

$$\mathbf{r}_{G_2} = \mathbf{r}'_{G_2} - \mathbf{r}'_G = \begin{bmatrix} -6 \\ 105 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -19.41 \\ 74.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.41 \\ 30.49 \end{bmatrix}$$

Il tensore d'inerzia rispetto a G viene calcolato come somma dei due contributi dei due rettangoli: $\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_G^{(1)} + \mathbf{J}_G^{(2)}$. Applicando il teorema del trasporto, con la stessa procedura utilizzata per la sezione a doppia T, si ottiene:

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_{G_1}^{(1)} + A_1 (\mathbf{r}_{G_1} \otimes \mathbf{r}_{G_1}) + \mathbf{J}_{G_2}^{(2)} + A_2 (\mathbf{r}_{G_2} \otimes \mathbf{r}_{G_2}) \quad (3.104)$$

Si ha:

$$\mathbf{J}_{G_1} = \begin{bmatrix} \frac{10 \cdot 100^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{100 \cdot 10^3}{12} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{G_2} = \begin{bmatrix} \frac{190 \cdot 12^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot 190^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

e dalla (3.104) si ottiene:

$$\mathbf{J}_G = \begin{bmatrix} 2.206 \text{ E } 6 & 3.059 \text{ E } 6 \\ 3.059 \text{ E } 6 & 13.819 \text{ E } 6 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

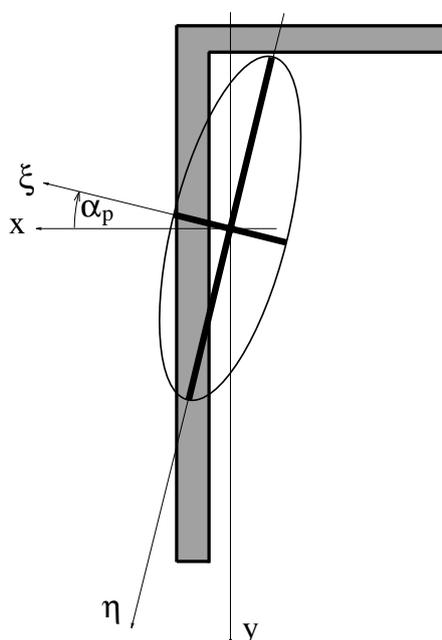


Figura 3.29: Sezione a L: ellisse d'inerzia.

Il cerchio di Mohr è riportato in figura 3.30. I momenti principali si ricavano mediante le (3.53):

$$J_{G\xi} = \frac{2.206 + 13.819}{2} - \sqrt{\left(\frac{2.206 - 13.819}{2}\right)^2 + 3.059^2} = 1.450 \text{ E } 6 \text{ mm}^4 \quad (3.107)$$

$$J_{G\eta} = \frac{2.206 + 13.819}{2} + \sqrt{\left(\frac{2.206 - 13.819}{2}\right)^2 + 3.059^2} = 14.575 \text{ E } 6 \text{ mm}^4$$

e le direzioni principali si ottengono graficamente mediante la costruzione descritta dopo le relazioni (3.53).

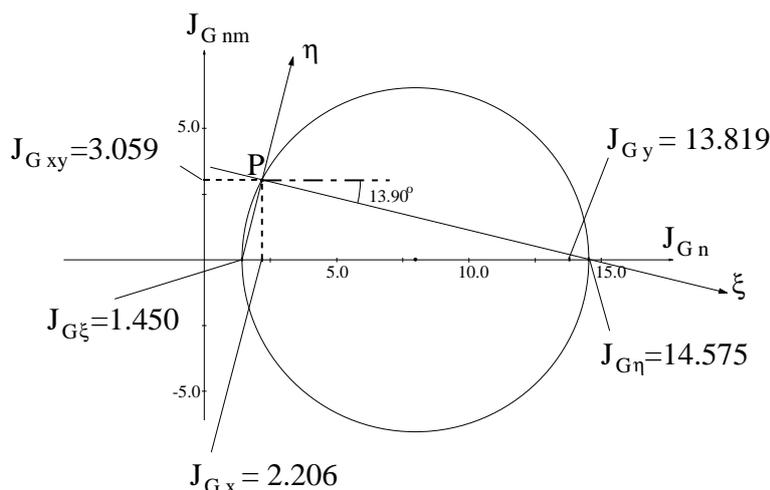


Figura 3.30: Sezione a L: cerchio di Mohr.

Il valore numerico dell'angolo α_p formato dall'asse ξ con l'asse x è dato dalla formula (3.56):

$$\alpha_p = \operatorname{tang}^{-1} \left(\frac{J_{G\xi} - J_{Gx}}{J_{Gxy}} \right) = \operatorname{tang}^{-1} \left(\frac{1.450 \text{ E } 6 - 2.206 \text{ E } 6}{3.059 \text{ E } 6} \right) = -13.88^\circ \quad (3.108)$$

I raggi d'inerzia sono dati da:

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{1.450 \text{ E } 6}{3280}} = 21.03 \text{ mm} \quad \rho_\eta = \sqrt{\frac{14.575 \text{ E } 6}{3280}} = 66.66 \text{ mm} \quad (3.109)$$

L'ellisse d'inerzia è riportata in figura 3.29. Si noti che gli assi ottenuti sul cerchio di Mohr vanno ruotati di 180° per ottenere quelli dell'ellisse d'inerzia, in quanto anche gli assi x ed y in figura sono stati disegnati ruotati di 180° .

3.2.6 Esercizi proposti

Si determinino le proprietà geometriche ed inerziali delle sezioni riportate nelle figure 3.31-3.33.

Nell'esercizio 3.2.1 si suggerisce di utilizzare la procedura analoga a quella adoperata per la sezione a corona circolare, ovvero di calcolare il tensore d'inerzia come differenza tra quello della sezione rettangolare piena e quello della parte rettangolare vuota all'interno della sezione.

Nell'esercizio 2 si suggerisce di tener conto dell'asse di simmetria della sezione, che conterrà il baricentro, e di scegliere come sistema di riferimento iniziale $\{O, x', y'\}$ uno con l'origine sull'asse di simmetria e con l'asse y' coincidente con l'asse di simmetria stesso. In tal modo, la coordinata x'_G del baricentro sarà sicuramente nulla mentre

⁷Questo potrebbe evitarsi disegnando sulla sezione l'asse x orientato verso destra e quello y orientato verso l'alto. Classicamente però l'asse y viene orientato verso il basso per uniformarsi alla convenzione della modellazione monodimensionale della trave.

la coordinata y'_G va calcolata imponendo l'annullamento della componente $S_{Oy'}$ del momento statico.

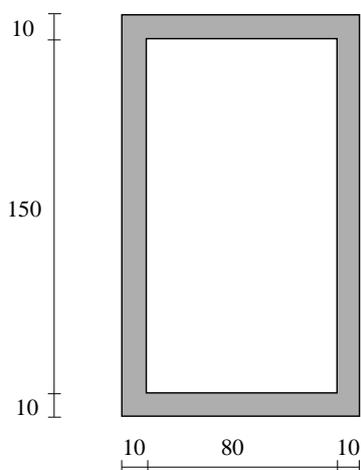


Figura 3.31: Esercizio 3.2.1.

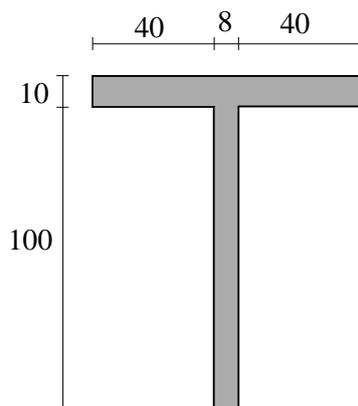


Figura 3.32: Esercizio 3.2.2.

3.3 Sforzo normale e flessione

Si consideri il caso in cui le uniche caratteristiche della sollecitazione non nulle sono lo sforzo normale N ed il momento flettente M_f (figura 3.34).

La soluzione esatta del problema del De Saint Venant in tale caso fornisce uno stato di tensione ovunque monoassiale in direzione z . L'unica componente della matrice della tensione è dunque la σ_z . Inoltre, la σ_z varia linearmente con x ed y , ovvero nel piano della generica sezione retta, mentre non dipende da z , per cui lo stato tensionale si ripete

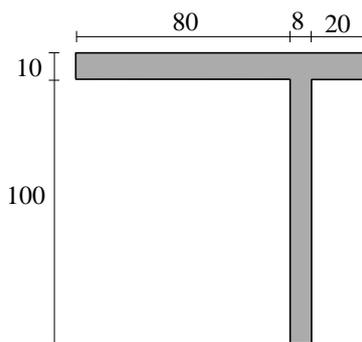


Figura 3.33: Esercizio 3.2.3.

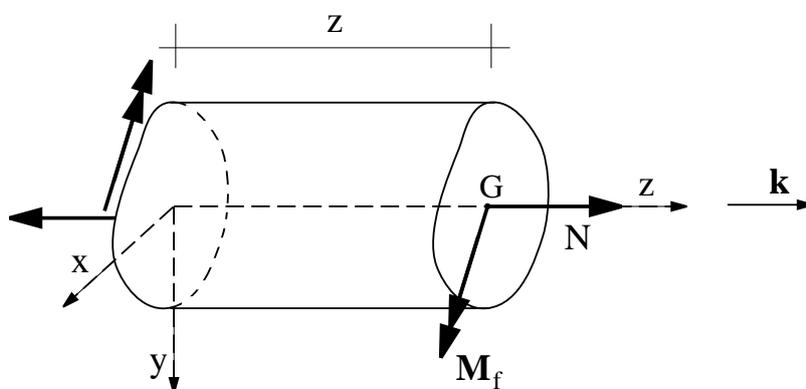


Figura 3.34: Sollecitazione di sforzo normale e flessione.

costantemente su ogni sezione. Si ha dunque:

$$\tau_z = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y) = \sigma_o + h_1 x + h_2 y \Rightarrow \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (3.110)$$

La seconda di tali relazioni può anche scriversi:

$$\sigma_z = \sigma_o + \mathbf{h} \cdot \mathbf{r} \quad \text{con: } \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Si noti che, poiché \mathbf{r} e \mathbf{h} definiscono vettori paralleli al piano xy aventi quindi la terza componente secondo z sempre nulla, essi sono stati e verranno nel seguito considerati vettori del piano, aventi quindi solo due componenti.

Lo sforzo normale è legato al campo delle σ_z dalla $(3.30)_1$, sviluppando la quale si ricava:

$$N = \int_A \sigma_z dA = \int_A (\sigma_o + \mathbf{h} \cdot \mathbf{r}) dA = \int_A \sigma_o dA + \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{r} dA \quad (3.112)$$

I termini σ_o e \mathbf{h} non dipendono da \mathbf{r} e possono essere portati fuori dall'integrale:

$$N = \sigma_o \int_A dA + \mathbf{h} \cdot \int_A \mathbf{r} dA = \sigma_o A + \mathbf{h} \cdot \mathbf{S}_G \quad (3.113)$$

Poiché $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_G$ rappresenta il vettore posizione rispetto al baricentro nel piano della sezione, \mathbf{S}_G è il momento statico rispetto al baricentro della sezione e quindi è nullo in base alla definizione di baricentro. Si ottiene in definitiva:

$$N = \sigma_o A \quad \Rightarrow \quad \sigma_o = \frac{N}{A} \quad (3.114)$$

La relazione (3.30)₂ che fornisce la relazione tra il momento flettente \mathbf{M}_f ed il campo delle σ_z può risciversi come segue:

$$\mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \sigma_z dA = \int_A \mathbf{R}^T \mathbf{r} \sigma_z dA \quad (3.115)$$

dove:

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{R}^T \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Avendosi anche:

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ -\sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

si chiarisce che \mathbf{R} è la matrice associata al tensore che ruota un vettore del piano di $\pi/2$ in senso orario (figura 3.35), e risulta la trasposta del tensore che ruota un vettore di $\pi/2$ in senso antiorario, ovvero di :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Chiaramente si ha:

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{r} = \mathbf{r} \quad (3.119)$$

in quanto $\mathbf{R} \mathbf{R}^T$ è il tensore che ruota un vettore nel piano prima di $\pi/2$ in senso orario e poi di $\pi/2$ in senso antiorario, e quindi restituisce lo stesso vettore.

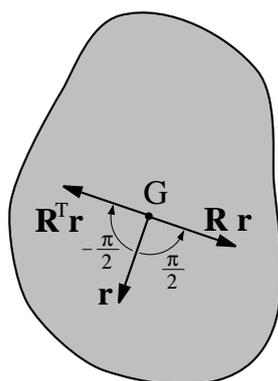
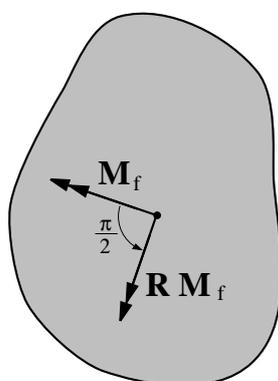
Pertanto, moltiplicando a sinistra ambo i membri della (3.115) per \mathbf{R} , si ha:

$$\mathbf{R} \mathbf{M}_f = \int_A \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{r} \sigma_z dA = \int_A \mathbf{r} \sigma_z dA \quad (3.120)$$

dove $\mathbf{R} \mathbf{M}_f$ fornisce il vettore ruotato di \mathbf{M}_f di $\pi/2$ in senso antiorario (figura 3.36).

Sostituendo l'espressione (3.111) di σ_z e sviluppando si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \mathbf{M}_f &= \int_A \mathbf{r} (\sigma_o + \mathbf{h} \cdot \mathbf{r}) dA = \int_A \sigma_o \mathbf{r} dA + \int_A \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}) dA = \\ &= \int_A \sigma_o \mathbf{r} dA + \int_A (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{h} dA \end{aligned} \quad (3.121)$$

Figura 3.35: Rotazione di un vettore del piano mediante i tensori \mathbf{R} e \mathbf{R}^T .Figura 3.36: Rotazione di \mathbf{M}_f di $\pi/2$ in senso antiorario mediante \mathbf{R} .

I termini σ_o e \mathbf{h} non dipendono da \mathbf{r} e possono essere portati fuori dall'integrale:

$$\mathbf{R} \mathbf{M}_f = \sigma_o \int_A \mathbf{r} dA + \int_A (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dA \mathbf{h} = \sigma_o \mathbf{S}_G + \mathbf{J}_G \mathbf{h} \quad (3.122)$$

Essendo $\mathbf{S}_G = \mathbf{0}$ si ottiene:

$$\mathbf{R} \mathbf{M}_f = \mathbf{J}_G \mathbf{h} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h} = (\mathbf{J}_G)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{M}_f \quad (3.123)$$

Sostituendo nella (3.111) le relazioni (3.114) e (3.123) ottenute, si ricava per la σ_z la seguente espressione:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + (\mathbf{J}_G)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{r} \quad (3.124)$$

L'asse baricentrico del piano della sezione parallelo al vettore $\mathbf{R} \mathbf{M}_f$, ovvero ortogonale al vettore momento flettente \mathbf{M}_f è detto 'asse di sollecitazione', è indicato con s ed orientato nella direzione di $\mathbf{R} \mathbf{M}_f$. La retta luogo dei punti in cui si annulla la $\sigma_z = 0$ è

detta ‘asse neutro’ ed è indicato con n . L’asse ortogonale a n , orientato in modo che n si sovrapponga ad esso ruotando di $\pi/2$ in senso antiorario, è detto ‘asse di flessione’ ed è indicato con f . Il nome asse di flessione nasce dal fatto che il piano fz è il cosiddetto piano di flessione, ovvero quello in cui si flette l’asse della trave.

In un riferimento non principale la matrice associata a $(\mathbf{J}_G)^{-1}$ è data da:

$$(\mathbf{J}_G)^{-1} = \frac{1}{J_{Gx} J_{Gy} - J_{Gxy}^2} \begin{bmatrix} J_{Gy} & -J_{Gxy} \\ -J_{Gxy} & J_{Gx} \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

In un riferimento principale $J_{Gxy} = 0$ e si ha:

$$(\mathbf{J}_G)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{Gx}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_{Gy}} \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

Essendo:

$$\mathbf{R} \mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} -M_y \\ M_x \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

in un riferimento principale la (3.124) diventa:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_{Gx}} x + \frac{M_x}{J_{Gy}} y \quad (3.128)$$

Si esaminano di seguito alcuni casi particolari.

3.3.1 Sforzo normale centrato

Si ha sforzo normale centrato quanto $N \neq 0$ e $\mathbf{M}_f = \mathbf{0}$. Dalla (3.124) si ricava una σ_z costante sulla sezione pari a:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \quad (3.129)$$

In questo caso gli assi di sollecitazione e di flessione non sono definiti e l’asse neutro è la retta impropria del piano.

La tensione equivalente è pari al modulo della σ_z , per cui la verifica di resistenza per materiali duttili si effettua controllando che si abbia:

$$\sigma_{eq} = |\sigma_z| = \frac{|N|}{A} \leq \sigma_{am} \quad (3.130)$$

Le componenti della deformazione si ricavano attraverso il legame elastico e sono date da:

$$\varepsilon_z = \frac{N}{EA} = \varepsilon_a \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{N}{EA} = -\nu \varepsilon_a \quad \gamma_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (3.131)$$

avendo indicato con ε_a la dilatazione assiale nella trave, legata allo sforzo normale dalla relazione:

$$\varepsilon_a = \frac{N}{EA} \quad (3.132)$$

3.3.2 Flessione retta

Si ha flessione retta quando $N = 0$ ed il vettore momento flettente è diretto secondo una direzione principale.

Flessione retta intorno ad x

In un riferimento principale $\{G, x, y\}$ si ha flessione retta intorno all'asse x quando:

$$N = 0 \quad M_x \neq 0 \quad M_y = 0 \quad (3.133)$$

Essendo in un riferimento principale si può utilizzare la (3.128), che fornisce la relazione:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_{Gy}} y \quad (3.134)$$

nota come 'formula di Navier'.

In questo caso gli assi di sollecitazione e di flessione coincidono entrambi con y mentre l'asse neutro coincide con x . L'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono ortogonali fra loro.

La tensione equivalente è pari al modulo della σ_z , per cui la verifica di resistenza per materiali duttili si effettua controllando che si abbia:

$$\sigma_{eq} = |\sigma_z| = \frac{|M_x|}{J_{Gy}} |y_{max}| \leq \sigma_{am} \quad (3.135)$$

avendo indicato con $|y_{max}|$ il massimo valore assoluto di y sulla sezione.

Si definisce 'modulo di resistenza' rispetto a x e si indica con W_x lo scalare:

$$W_x = \frac{J_{Gy}}{|y_{max}|} \quad (3.136)$$

La (3.135) può allora risciversi:

$$\frac{|M_x|}{W_x} \leq \sigma_{am} \quad (3.137)$$

Per le sezioni dei profilati metallici disponibili in commercio il modulo di resistenza è tabellato, insieme a tutte le altre caratteristiche geometriche ed inerziali delle sezioni stesse.

Le componenti della deformazione si ricavano attraverso il legame elastico e sono date da:

$$\varepsilon_z = \frac{M_x}{E J_{Gy}} y = \chi_y y \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{M_x}{E J_{Gy}} y = -\nu \chi_y y \quad \gamma_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (3.138)$$

vendo indicato con χ_y la curvatura nel piano yz , legata al momento M_x dalla relazione:

$$\chi_y = \frac{M_x}{E J_{Gy}} \quad (3.139)$$

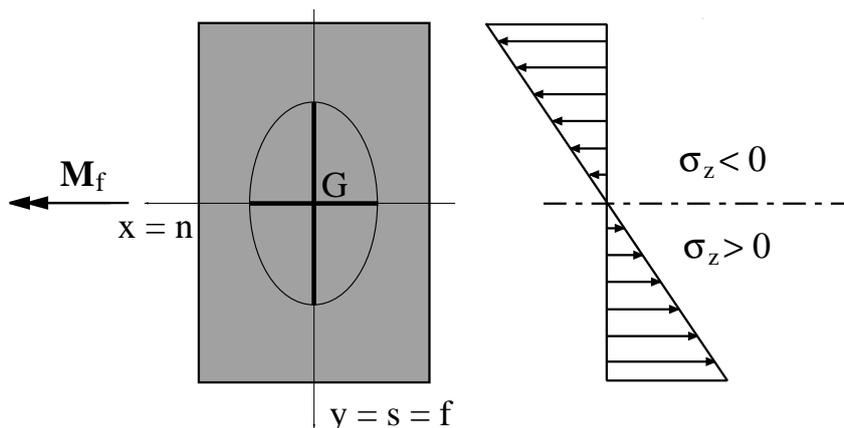


Figura 3.37: Sezione rettangolare soggetta a flessione retta intorno ad x .

Flessione retta intorno ad y

In un riferimento principale $\{G, x, y\}$ si ha flessione retta intorno all'asse y quando:

$$N = 0 \quad M_x = 0 \quad M_y \neq 0 \quad (3.140)$$

Dalla (3.128) si ottiene:

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{J_{Gx}} x \quad (3.141)$$

In questo caso gli assi di sollecitazione e di flessione coincidono entrambi con $-x$ mentre l'asse neutro coincide con y . L'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono ortogonali fra loro.

La tensione equivalente è pari al modulo della σ_z , per cui la verifica di resistenza per materiali duttili si effettua controllando che si abbia:

$$\sigma_{eq} = |\sigma_z| = \frac{|M_y|}{J_{Gx}} |x_{max}| \leq \sigma_{am} \quad (3.142)$$

avendo indicato con $|x_{max}|$ il massimo valore assoluto di x sulla sezione.

Introducendo il 'modulo di resistenza' rispetto a y , indicato con W_y :

$$W_y = \frac{J_{Gx}}{|x_{max}|} \quad (3.143)$$

La (3.142) può allora risciversi:

$$\frac{|M_y|}{W_x} \leq \sigma_{am} \quad (3.144)$$

Le componenti della deformazione sono date da:

$$\varepsilon_z = -\frac{M_y}{E J_{Gx}} x = -\chi_x x \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \nu \frac{M_y}{E J_{Gx}} x = \nu \chi_x x \quad \gamma_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (3.145)$$

vendo indicato con χ_x la curvatura nel piano xz , legata al momento M_y dalla relazione:

$$\chi_x = \frac{M_y}{E J_{Gx}} \quad (3.146)$$

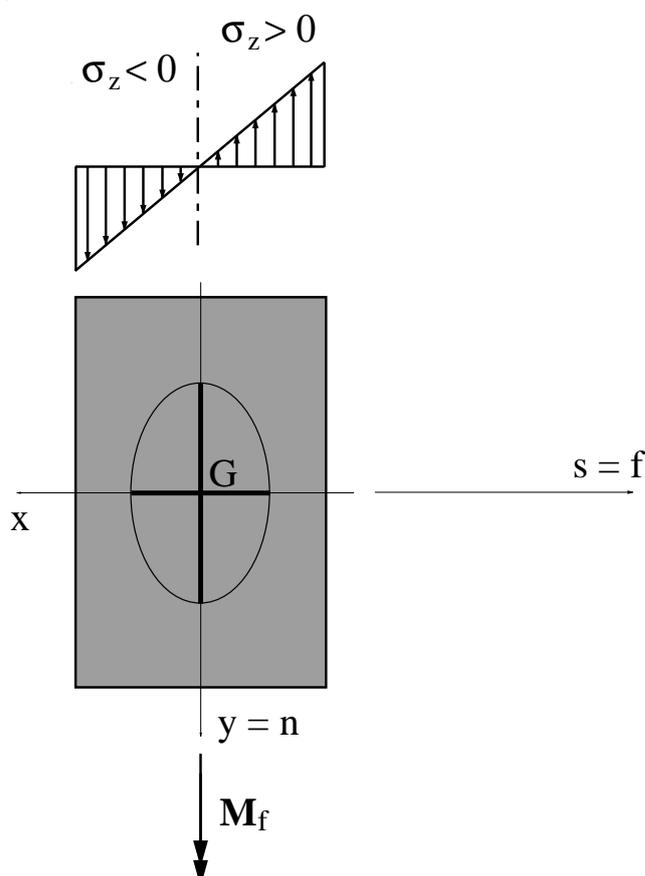


Figura 3.38: Sezione rettangolare soggetta a flessione retta intorno ad y .

Relazione tra asse neutro ed asse di sollecitazione

In generale, si ha flessione retta quando l'asse di sollecitazione coincide con un asse principale d'inerzia. In tal caso l'asse neutro e l'asse di sollecitazione sono ortogonali fra loro. Essendo assi principali, essi sono anche coniugati rispetto all'ellisse d'inerzia. Inoltre nella flessione retta l'asse di flessione coincide con l'asse di sollecitazione.

E' utile sottolineare che, poiché la tensione σ_z varia linearmente sulla sezione, le curve di livello della σ_z , ovvero i luoghi dei punti $\sigma_z = \text{cost.}$, sono rette parallele all'asse neutro.

3.3.3 Flessione deviata

Si ha flessione deviata quando $N = 0$ ed il vettore momento flettente è diverso da zero e non è diretto secondo un'asse principale d'inertzia (3.39). Dalla (3.124) si ricava:

$$\sigma_z = (\mathbf{J}_G)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{r} \quad (3.147)$$

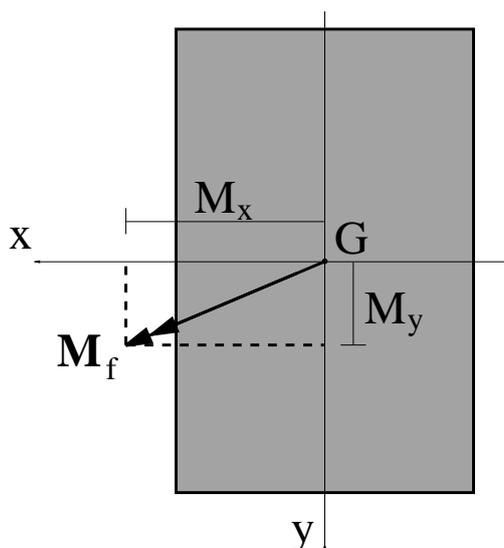


Figura 3.39: Sezione rettangolare soggetta a flessione deviata.

In un riferimento principale la (3.147) si scrive:

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{J_{Gx}} x + \frac{M_x}{J_{Gy}} y \quad (3.148)$$

e fornisce il campo delle σ_z come sovrapposizione quelli associati a due flessioni rette.

Il versore \mathbf{s} dell'asse di sollecitazione s è dato da:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{R} \mathbf{M}_f}{\|\mathbf{R} \mathbf{M}_f\|} \quad (3.149)$$

L'equazione dell'asse neutro n è invece:

$$(\mathbf{J}_G)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (3.150)$$

e dividendo per $\|\mathbf{R} \mathbf{M}_f\|$ fornisce:

$$(\mathbf{J}_G)^{-1} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (3.151)$$

Si nota dalle (3.150) e (3.151) che l'asse neutro contiene il baricentro della sezione. Il versore \mathbf{n} di n (definito a meno del segno) soddisfa la relazione:

$$(\mathbf{J}_G)^{-1} \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.152)$$

ovvero la relazione di coniugio tra s ed n rispetto all'ellisse d'inerzia della sezione.

Nella flessione deviata, dunque, l'asse neutro n e l'asse di sollecitazione s risultano coniugati rispetto all'ellisse centrale d'inerzia. Assegnato l'asse di sollecitazione s , l'asse neutro può dunque determinarsi attraverso la costruzione grafica mostrata in precedenza in figura 3.18 e riportata di seguito in figura 3.40 per l'esempio della sezione rettangolare di figura 3.39.

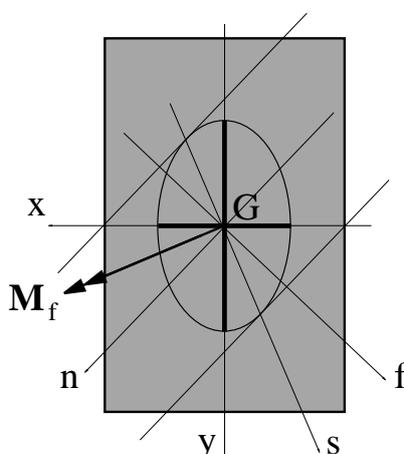


Figura 3.40: Sezione rettangolare soggetta a flessione deviata: determinazione grafica dell'asse neutro.

L'asse di flessione, ortogonale all'asse neutro, non coincide con l'asse di sollecitazione.

Formula monomia della flessione deviata

Supponendo di conoscere l'asse neutro n in un caso di flessione deviata, si assuma un sistema di riferimento non principale con l'asse x coincidente con n , e si orienti n concordemente a x . Le linee di livello della σ_z , di equazione $\sigma_z = cost.$, sono parallele a n (figura 3.41) e dunque, con la scelta fatta, sono anche parallele ad x . Dunque σ_z non dipende da x e risulta solamente funzione lineare di y , per cui si ha:

$$\sigma_z = \beta y \quad (3.153)$$

Imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno a $n = x$ si ha:

$$M_x = \int_A \sigma_z y \, dA = \int_A \beta y^2 \, dA = \beta \int_A y^2 \, dA = \beta J_{Gy} \quad (3.154)$$

ovvero:

$$\beta = \frac{M_x}{J_{Gy}} \quad (3.155)$$

da cui, sostituendo nella (3.153), si ottiene la cosiddetta ‘formula monomia’⁸:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_{Gy}} y \quad (3.156)$$

Essendo $M_n = M_x$, e ponendo inoltre $I_{Gx} = J_{Gy}$ e $y = d_n$, si ottiene la seguente altra espressione della formula monomia:

$$\sigma_z = \frac{M_n}{I_{Gx}} d_n \quad (3.157)$$

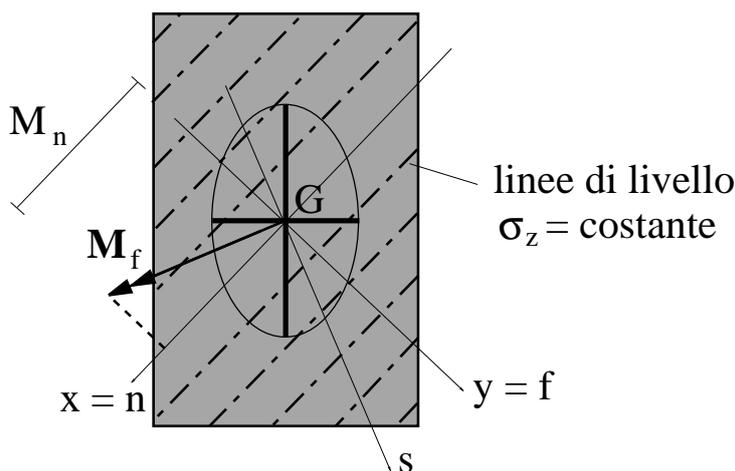


Figura 3.41: Ponendo $x = n$ la σ_z è funzione lineare di y .

3.3.4 Sforzo normale eccentrico

Si ha sforzo normale eccentrico quando il sistema delle σ_z sulla sezione è equivalente ad una risultante $N \neq 0$ applicata nel baricentro e ad un momento flettente $M_f \neq 0$. La sollecitazione in questo caso si dice anche ‘tensoflessione’ se $N > 0$, o ‘pressoflessione’ se $N < 0$.

⁸Si noti che la formula monomia della flessione deviata risulta formalmente identica alla formula di Navier. Tuttavia, nella formula di Navier M_x è l’unica componente non nulla del momento flettente, mentre nella formula monomia $M_x = M_n$ non è l’unica componente, essendo anche $M_y \neq 0$.

Sovrapposizione degli effetti

In tal caso si può operare per sovrapposizione degli effetti ed ottenere, in un sistema di riferimento principale, il campo delle σ_z mediante la (3.128):

$$\sigma_z = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_{Gx}} x + \frac{M_x}{J_{Gy}} y \quad (3.158)$$

Si ha quindi sovrapposizione di uno sforzo normale e di una flessione retta, se una delle componenti M_x e M_y è nulla, o di uno sforzo normale centrato e di due flessioni rette, se entrambe le componenti M_x e M_y sono non nulle. In quest'ultimo caso si può operare per sovrapposizione di uno sforzo normale centrato e di una flessione deviata.

Espressione della σ_z in un riferimento non principale

Volendo evitare di determinare gli assi principali di inerzia si può utilizzare la (3.124) espressa in un riferimento non principale:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{1}{J_{Gx} J_{Gy} - J_{Gxy}^2} \begin{bmatrix} J_{Gy} & -J_{Gxy} \\ -J_{Gxy} & J_{Gx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_y \\ M_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

Sistema di un'unica forza eccentrica

Alternativamente ci si può ricondurre ad un sistema di un'unica forza N diretta secondo z ma applicata in un punto C diverso da G , detto 'centro di sollecitazione'. Detto \mathbf{r}_C il vettore posizione di C rispetto a G , si dimostra facilmente attraverso la condizione di equivalenza del momento risultante rispetto a G che si ha:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{R} \mathbf{M}_f}{N} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} -M_y \\ M_x \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

L'asse di sollecitazione passa dunque per G e per C .

L'ultima relazione può anche scriversi:

$$M_x = N y_C \quad M_y = -N x_C \quad (3.161)$$

Assumendo un sistema di riferimento principale, e sostituendo le (3.161) nella (3.128) si ottiene:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N x_C x}{J_{Gx}} + \frac{N y_C y}{J_{Gy}} = \frac{N}{A} + \frac{N x_C x}{A \rho_x^2} + \frac{N y_C y}{A \rho_y^2} \quad (3.162)$$

avendo sfruttato le definizioni di raggi d'inerzia ρ_x e ρ_y . Mettendo in evidenza N/A si ottiene:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{x_C x}{\rho_x^2} + \frac{y_C y}{\rho_y^2} \right) \quad (3.163)$$

Eguagliando a zero l'espressione precedente della σ_z si ricava l'equazione dell'asse neutro nel caso di sforzo normale eccentrico:

$$1 + \frac{x_C x}{\rho_x^2} + \frac{y_C y}{\rho_y^2} = 0 \quad (3.164)$$

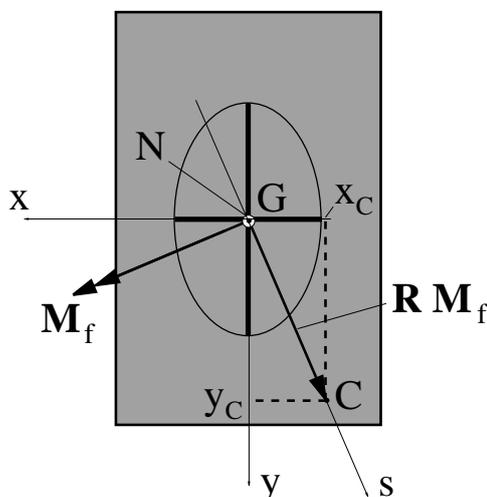


Figura 3.42: Posizione del centro di sollecitazione.

Confrontando tale ultima relazione con la (3.74), si deduce che l'asse neutro si ottiene come antipolare del centro di sollecitazione C . Esso può dunque trovarsi mediante la costruzione grafica descritta in 3.20. In particolare, da tale costruzione, si evince che l'asse neutro non passa per il baricentro e si trova sempre dalla parte opposta di C rispetto a G .

Si dimostra anche facilmente che l'asse parallelo a n e passante per il baricentro è coniugato di s rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.

3.3.5 Alcuni esempi

Problema 1

Si consideri la struttura di figura 3.43 caratterizzata da due travi portanti con un ritto ed un traverso ciascuna. Su di esse è appoggiata una piastra secondaria, che con buona approssimazione può essere studiata come trave appoggiata. Su tale piastra agisce un carico distribuito per unità di superficie q_s , mentre su un bordo della piastra agisce un carico lineare q_{lin} come descritto in figura, in un piano che contiene gli assi delle travi verticali. Si trascura il peso proprio della struttura.

Si considerano i seguenti dati:

$$q_s = 12 \text{ KN m}^{-2} \quad a = 3 \text{ m} \quad q_{lin} = 50 \text{ KN m}^{-1} \quad L = 1.5 \text{ m}$$

Per il materiale si assume una tensione ammissibile di $\sigma_{am} = 200 \text{ MPa}$. La sezione della trave è quella che è stata studiata nella sezione 3.2.5.

Il carico q_s si ripartisce sulle due travi come carico a metro lineare $q = q_s a/2 = 12 \cdot 3/2 = 18 \text{ KN m}^{-1}$. Il carico q_{lin} si ripartisce in testa alle travi come due forze

concentrate $F = q_{lin} a/2 = 50 \cdot 3/2 = 75 \text{ KN}$. Sulla sezione d'incastro indicata in figura 3.43.d si hanno le seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$N = -qL - F = -18 \cdot 1.5 - 75 = -102 \text{ KN}$$

$$M_x = -\frac{qL^2}{2} = 20.25 \text{ KNm}$$

$$M_y = 0$$

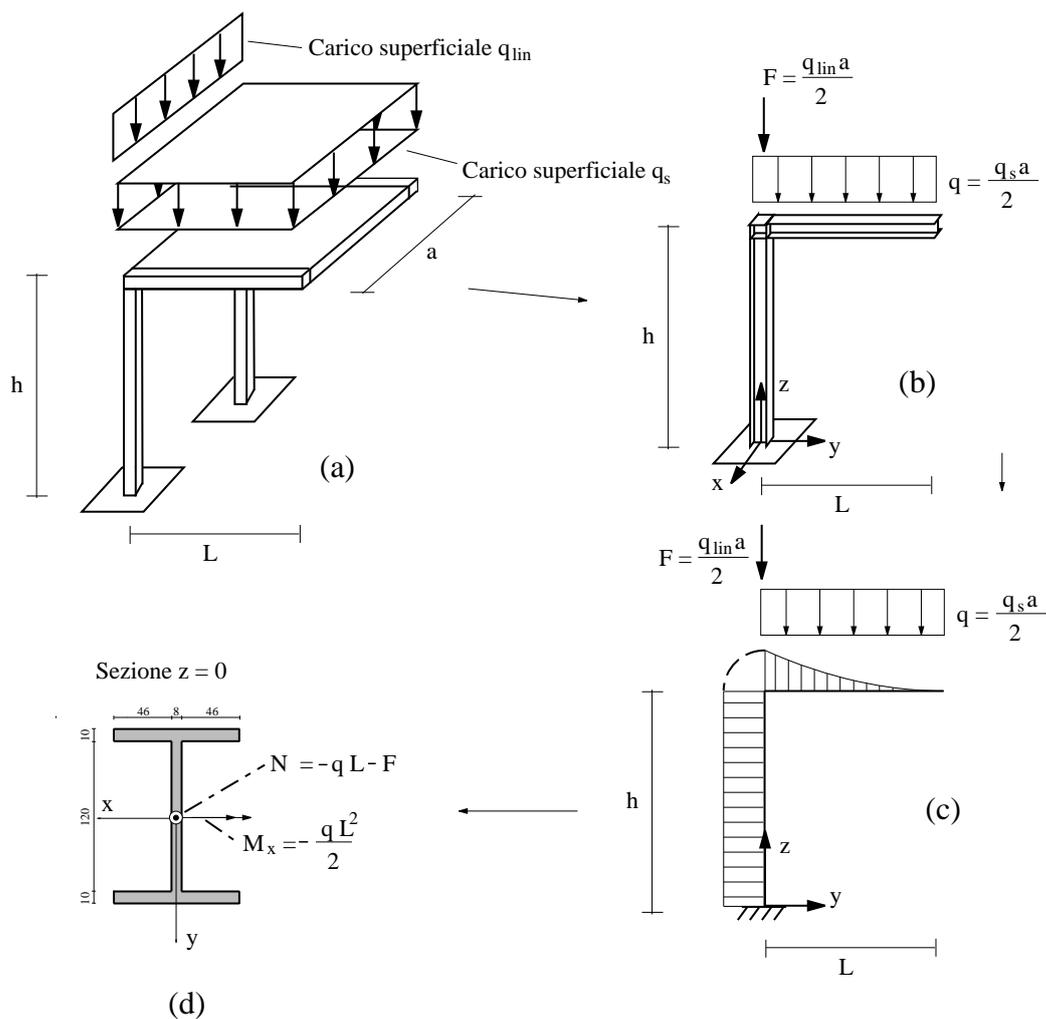


Figura 3.43: Problema 1: (a) struttura spaziale completa; (b) una delle due travi portanti; (c) schema della trave portante; (d) sezione d'incastro e relative caratteristiche della sollecitazione.

Sovrapposizione degli effetti

La sollecitazione può vedersi come sovrapposizione di uno sforzo normale centrato e di una flessione retta intorno a x .

Per effetto solamente dello sforzo normale, si avrebbe sulla sezione il diagramma costante di σ_z riportato in figura 3.44, con σ_z pari a:

$$\sigma_{z,N} = \frac{N}{A} = -\frac{102}{2960} = -0.034 \text{ KN mm}^{-2} = -34 \text{ MPa}$$

Per effetto solamente del momento flettente M_x si avrebbe il diagramma lineare riportato in figura 3.44. Per l'emisimmetria del diagramma il massimo valore della tensione di trazione coincide con il massimo valore assoluto della tensione di compressione. Tali valori si ottengono dalla relazione:

$$\sigma_{z,M_x} = \frac{|M_x|}{W_x} \quad (3.165)$$

Il modulo di resistenza W_x , tenendo conto della componente J_{Gy} del tensore d'inerzia calcolata nelle (3.94) e che $|y_{max}| = 7 \text{ cm}$, è dato da:

$$W_x = \frac{961}{7} = 137.3 \text{ cm}^3$$

e dunque:

$$\sigma_{z,M_x} = \frac{|M_x|}{W_{max}} = \frac{2025}{137.3} = 14.7 \text{ KN cm}^{-2} = 147 \text{ N mm}^{-2} = 147 \text{ MPa}$$

Sommando i due diagrammi si ha il diagramma di figura 3.44. La massima tensione è di compressione e fornisce, in assenza di tensioni tangenziali, una massima tensione equivalente pari a:

$$\sigma_{eq,max} = 34 + 147 = 181 \text{ MPa} < \sigma_{am}$$

per cui la verifica di resistenza risulta soddisfatta.

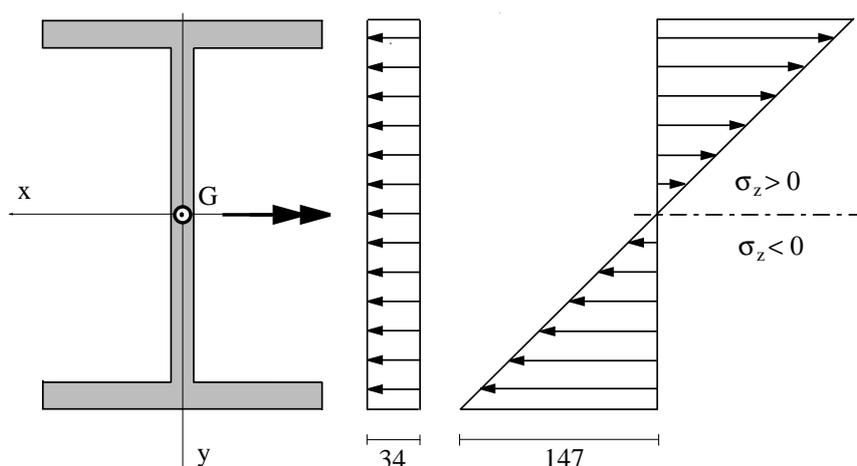


Figura 3.44: Diagramma delle tensioni σ_z : sovrapposizione degli effetti.

Determinazione dell'asse neutro come antipolare del centro di sollecitazione

La posizione dell'asse neutro può essere determinata considerando le caratteristiche della sollecitazione equivalenti ad uno sforzo normale eccentrico. La posizione del centro di sollecitazione è data da:

$$x_C = 0 \quad y_C = \frac{M_x}{N} = \frac{-20250}{-102} = 199 \text{ mm}$$

Essendo $x_C = 0$, l'equazione dell'asse neutro diventa:

$$1 + \frac{y_C y}{\rho_y^2} = 0 \Rightarrow y_C y = -\rho_y^2$$

Si vede quindi che l'asse neutro è parallelo all'asse x e la sua intersezione con l'asse y è data da:

$$y = -\frac{\rho_y^2}{y_C} = -\frac{57^2}{199} = -16 \text{ mm}$$

La posizione dell'asse neutro può anche trovarsi con la costruzione grafica illustrata in precedenza in figura 3.20. Nel caso in esame, essa si specializza come illustrato in figura 3.45.

Problema 2

Si consideri la stessa struttura del problema 1, nella quale però la sezione d'incastro sia la sezione a L studiata nella parte 3.2.5, disposta in modo che il suo baricentro sia coincidente con quello della sezione a doppia T e che gli assi x ed y usati per studiare la sezione a L coincidano con quelli della sezione a doppia T. Avendosi le stesse caratteristiche della sollecitazione del problema 1, le coordinate del centro di sollecitazione sono sempre $x_C = 0$ e $y_C = 199 \text{ mm}$. La determinazione grafica della posizione dell'asse neutro a partire dall'ellisse d'inerzia e mostrata in figura 3.46.

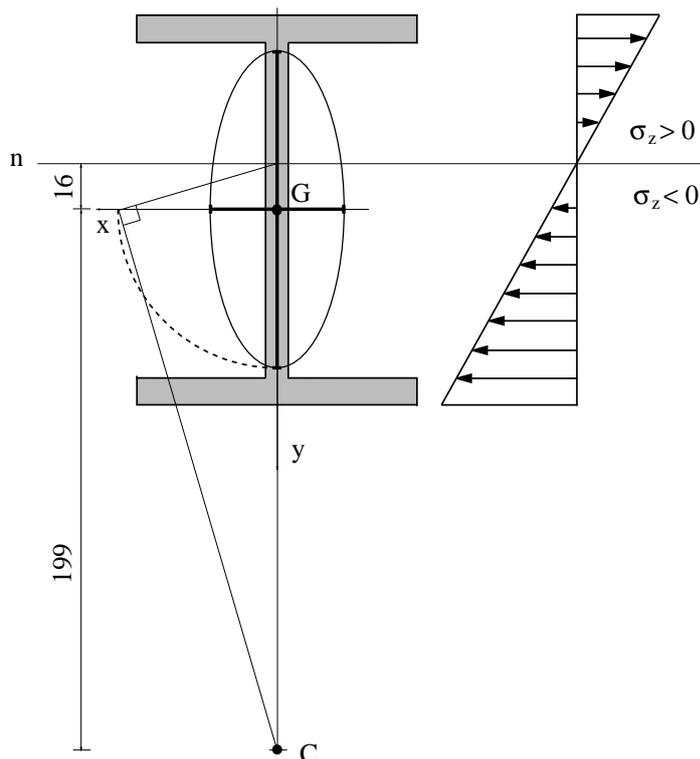


Figura 3.45: Determinazione grafica e verifica analitica della posizione dell'asse neutro.

Dal diagramma delle tensioni determinato in figura 3.46 si deduce che i valori massimo e minimo della tensione σ_z si hanno nei punti A e B . I loro vettori posizione espressi nel riferimento $\{O, x', y'\}$ di figura 3.28 sono:

$$\mathbf{r}'_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}'_B = \begin{bmatrix} -12 \\ 200 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

Nota il vettore posizione \mathbf{r}'_G del baricentro, sempre rispetto a $\{O, x', y'\}$, dalla (3.102), i vettori posizione espressi rispetto al sistema $\{G, x, y\}$ si ottengono da:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -19.41 \\ 74.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.41 \\ -74.51 \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}'_B - \mathbf{r}'_G = \begin{bmatrix} -12 \\ 200 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -19.41 \\ 74.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.41 \\ 125.49 \end{bmatrix}$$

Per calcolare i valori della σ_z mediante la (3.158) bisognerebbe esprimere sia \mathbf{r}_A ed \mathbf{r}_B che il momento \mathbf{M}_f nel sistema principale $\{G, \xi, \eta\}$, ruotato rispetto a $\{G, x, y\}$ di -13.9° . Conviene allora utilizzare direttamente la (3.159). Note le componenti di \mathbf{J}_G

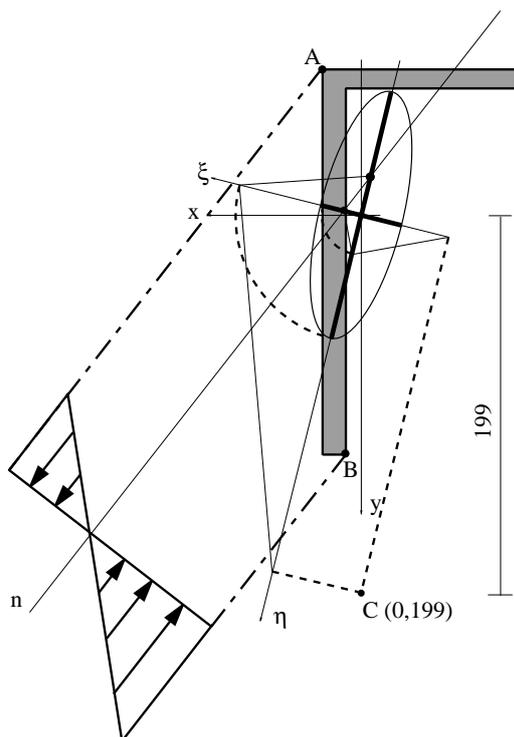


Figura 3.46: Determinazione grafica della posizione dell'asse neutro per la sezione a L.

rispetto a $\{G, x, y\}$ dalla (3.106), si ha:

$$N = -102 \text{ KN} \quad M_x = -20205 \text{ KN mm} \quad M_y = 0 \quad A = 3280 \text{ mm}^2$$

$$\mathbf{J}_G = \begin{bmatrix} 2.206 \text{ E } 6 & 3.059 \text{ E } 6 \\ 3.059 \text{ E } 6 & 13.819 \text{ E } 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} 19.41 \\ -74.51 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} 7.41 \\ 125.49 \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

Dalla (3.159) si ottiene allora:

$$\sigma_{z,A} = -\frac{102}{3280} + \frac{1.0 \text{ E } - 6}{2.206 \cdot 13.819 - 3.059^2} \begin{bmatrix} 13.819 & -3.059 \\ -3.059 & 2.206 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -20205 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19.41 \\ -74.51 \end{bmatrix} = \quad (3.169)$$

$$= -0.031 + 0.213 = 0.182 \text{ KN mm}^{-2} = 182 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{z,B} = -\frac{102}{3280} + \frac{1.0 \text{ E } - 6}{2.206 \cdot 13.819 - 3.059^2} \begin{bmatrix} 13.819 & -3.059 \\ -3.059 & 2.206 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -20205 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7.41 \\ 125.49 \end{bmatrix} = \quad (3.170)$$

$$= -0.031 - 0.243 = 0.274 \text{ KN mm}^{-2} = -274 \text{ MPa}$$

Se si assume ancora $\sigma_{am} = 200 \text{ MPa}$, si ottiene dunque:

$$\sigma_{eq,A} = 182 \text{ MPa} < \sigma_{am} \quad \sigma_{eq,B} = 274 \text{ MPa} > \sigma_{am} \quad (3.171)$$

per cui la verifica di resistenza è soddisfatta in A ma non lo è in B .

La tensione $\sigma_{z,G}$ nel baricentro vale:

$$\sigma_{z,G} = \frac{N}{A} = -\frac{102}{3280} = -0.031 \text{ KN mm}^{-2} = -31 \text{ MPa} \quad (3.172)$$

e si ottiene graficamente intersecando il diagramma delle tensioni di figura (3.97) con una retta parallela ad n passante per il baricentro G .

3.4 Torsione

Si ha solo sollecitazione di ‘torsione’ quando sulle due basi della trave sono applicati due momenti torcenti in equilibrio tra loro. Sulla generica sezione retta all’ascissa z il campo dei vettori tensione $\mathbf{t}(\mathbf{k})$ è dunque equivalente ad un momento torcente M_t , diretto secondo \mathbf{k} . Il vettore del momento torcente è allora pari a $M_t \mathbf{k}$ (figura 3.47).

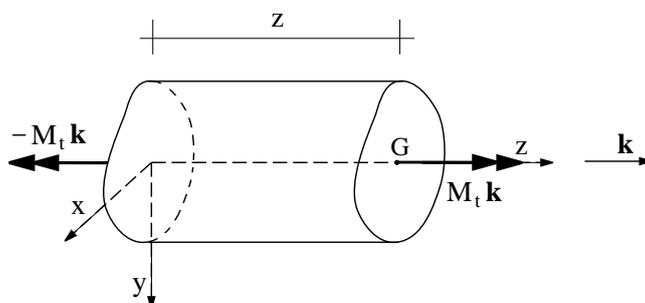


Figura 3.47: Sollecitazione di torsione.

Per questo tipo di sollecitazione si studieranno i casi della trave con sezione circolare, a corona circolare ed a sezione sottile biconnessa, mentre si accennerà solo alla soluzione per una sezione di tipo arbitrario.

3.4.1 Sezione circolare o a corona circolare

Nel caso di una sezione circolare o a corona circolare conviene partire dalla cinematica. In tale caso, infatti, la soluzione esatta del problema prevede che ogni sezione retta all’ascissa z sia caratterizzata da una rotazione rigida $\theta(z)$ intorno all’asse z . La soluzione è definita a meno di un arbitrario spostamento rigido della trave, che viene assunto nullo, e vale in generale l’ipotesi di piccoli spostamenti. La rotazione risulta essere una funzione lineare di z per cui si ha:

$$\theta(z) = \theta' z \quad (3.173)$$

dove θ' è detto ‘angolo specifico di torsione’, o anche ‘curvatura torsionale’, e rappresenta la rotazione relativa tra due sezioni poste a distanza unitaria.

Il campo di spostamenti è dunque dato da:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, z) = \theta' z \mathbf{k} \times \mathbf{r} \quad (3.174)$$

Sviluppando il prodotto vettoriale si ottiene:

$$\mathbf{u} = \theta' z \mathbf{k} \times \mathbf{r} = \theta' z \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = \theta' z \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \theta' z \mathbf{R} \mathbf{r} \quad (3.175)$$

dove \mathbf{R} è il tensore introdotto nella (3.118) che ruota un vettore di $\pi/2$ in senso antiorario⁹.

In componenti si ha:

$$\begin{cases} u_x = -\theta' y z \\ u_y = \theta' x z \\ u_z = 0 \end{cases} \quad (3.177)$$

Le uniche componenti non nulle del tensore della deformazione infinitesima sono:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\theta' y \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \theta' x \quad (3.178)$$

che raccolte in forma vettoriale, e riferendosi per semplicità a vettori nel piano della sezione, forniscono:

$$\boldsymbol{\gamma}_z = \theta' \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \theta' \mathbf{R} \mathbf{r} \quad \text{con: } \boldsymbol{\gamma}_z = \begin{bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} \quad (3.179)$$

Dal legame elastico si ottiene che le uniche componenti non nulle del tensore della tensione in ogni punto della sezione retta sono le componenti τ_{zx} e τ_{zy} :

$$\begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G \theta' y \\ G \theta' x \end{bmatrix} \quad (3.180)$$

ovvero, in forma vettoriale:

$$\boldsymbol{\tau}_z = G \theta' \mathbf{R} \mathbf{r} \quad (3.181)$$

⁹In questo caso, per maggiore chiarezza, si è dovuto considerare esplicitamente \mathbf{r} come un vettore dello spazio avente però terza componente nulla. In tal caso, dunque, la matrice associata ad \mathbf{R} va adattata al caso tridimensionale aggiungendo una riga ed una colonna di zeri:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

Le linee di flusso del campo delle τ_z , cioè le curve che sono in ogni punto tangenti al vettore τ_z , sono circonferenze aventi tutte centro nel baricentro della sezione (figura 3.48). Esse sono dunque tangenti al contorno esterno e, nel caso della sezione a corona circolare, al contorno interno.

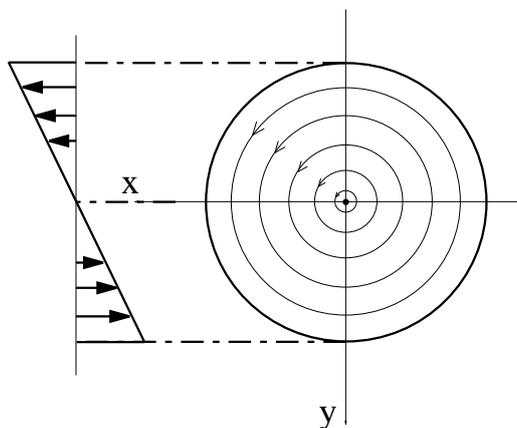


Figura 3.48: Linee di flusso e diagramma delle tensioni tangenziali τ_z in una sezione circolare.

Il momento torcente è dato dalla (3.30)₄:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = \int_A (G\theta' x^2 + G\theta' y^2) dA = \\ &= G\theta' \int_A (x^2 + y^2) dA = G\theta' \int_A \|\mathbf{r}\|^2 dA = G J_{Gp} \theta' \end{aligned} \quad (3.182)$$

da cui si ottiene:

$$M_t = C_t \theta' \quad \text{con: } C_t = G J_{Gp} \quad (3.183)$$

Il coefficiente $C_t = M_t/\theta'$ è detto 'rigidezza torsionale'.

Si ricorda che J_{Gp} indica il momento d'inerzia polare:

$$J_{Gp} = \int_A \|\mathbf{r}\|^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA \quad (3.184)$$

che per le sezioni circolare ed a corona circolare vale:

$$\begin{aligned} \text{sezione circolare:} \quad & J_{Gp} = \frac{\pi R^4}{2} \\ \text{sezione a corona circolare:} \quad & J_{Gp} = \frac{\pi (R_e^4 - R_i^4)}{2} \end{aligned} \quad (3.185)$$

Noti il momento torcente e la rigidezza torsionale, l'angolo specifico di torsione è dato da $\theta' = M_t/C_t = M_t/(G J_{Gp})$, e dunque il campo delle τ_z è dato dalla relazione:

$$\boldsymbol{\tau}_z = G \frac{M_t}{G J_{Gp}} \mathbf{R} \mathbf{r} = \frac{M_t}{J_{Gp}} \mathbf{R} \mathbf{r} \quad (3.186)$$

Per la sezione circolare il valore massimo del modulo della tensione tangenziale vale:

$$\tau_{max} = \|\boldsymbol{\tau}_z\|_{max} = \frac{M_t}{J_{Gp}} R = \frac{2 M_t}{\pi R^4} R \quad (3.187)$$

ovvero:

$$\tau_{max} = \frac{2 M_t}{\pi R^3} \quad (3.188)$$

Per la sezione a corona circolare si ha:

$$\tau_{max} = \frac{2 M_t}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} R_e \quad (3.189)$$

Le relazioni precedenti possono anche essere scritte come segue:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (3.190)$$

dove con W_t si è indicato il cosiddetto 'modulo di resistenza' a torsione che vale nei due casi:

$$\begin{aligned} \text{sezione circolare:} & \quad W_t = \frac{\pi R^3}{2} \\ \text{sezione a corona circolare:} & \quad W_t = \frac{\pi (R_e^4 - R_i^4)}{2 R_e} \end{aligned} \quad (3.191)$$

3.4.2 Cenni al caso generale e analogia idrodinamica

Nel caso generale di una sezione diversa da quella circolare o a corona circolare il campo di tensioni tangenziali (3.181) associato al campo di spostamenti (3.174) non soddisfa le condizioni di tangenza al contorno. Per tale motivo la sezione retta, oltre a subire una rotazione rigida, è anche caratterizzata da spostamenti in direzione dell'asse z , che determinano il cosiddetto 'ingobbamento' della sezione.

In virtù dell'ingobbamento le linee di flusso non sono più circonferenze e si 'adeguano' invece al contorno esterno ed eventualmente ad uno o più contorni interni della sezione. La soluzione matematica del problema è più complessa di quella ottenuta per le sezioni circolari ed è basata sul calcolo di una funzione ingobbamento che dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche della sezione.

La soluzione esatta del problema fornisce un campo di tensioni normali σ_z identicamente nullo, ed un campo di tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}_z$ caratterizzato dalle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_z = 0 & \forall \mathbf{x} \in A \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_z = 2 G \theta' & \forall \mathbf{x} \in A \\ \boldsymbol{\tau}_z \cdot \mathbf{n} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \partial A \end{cases} \quad (3.192)$$

La prima di tali relazioni si ottiene dalla (3.17) ponendo $\sigma_z = 0$ identicamente. La terza è la condizione al contorno (3.20).

La seconda delle (3.192) si dimostra essere una condizione di congruenza interna, legata al fatto che il campo delle tensioni tangenziali deve poter essere ricavabile a partire da un campo di spostamenti mediante il legame spostamenti-deformazioni ed il legame elastico tra deformazioni e tensioni.

Ai fini della determinazione qualitativa dell'andamento delle tensioni tangenziali in una sezione soggetta a torsione è utile considerare la seguente 'analogia idrodinamica'. Si consideri un recipiente cilindrico contenente un liquido che possa essere schematizzato come incomprimibile e non viscoso, in condizioni di quiete. Si faccia ruotare il liquido intorno ad un asse parallelo alle generatrici del cilindro con una velocità angolare costante ω molto piccola e si interrompa istantaneamente tale moto rotatorio (figura 3.49). Negli istanti successivi a quello in cui annulla la velocità angolare il campo di velocità su una sezione piana parallela alla base del cilindro è governato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \forall \mathbf{x} \in A \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\omega & \forall \mathbf{x} \in A \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \partial A \end{cases} \quad (3.193)$$

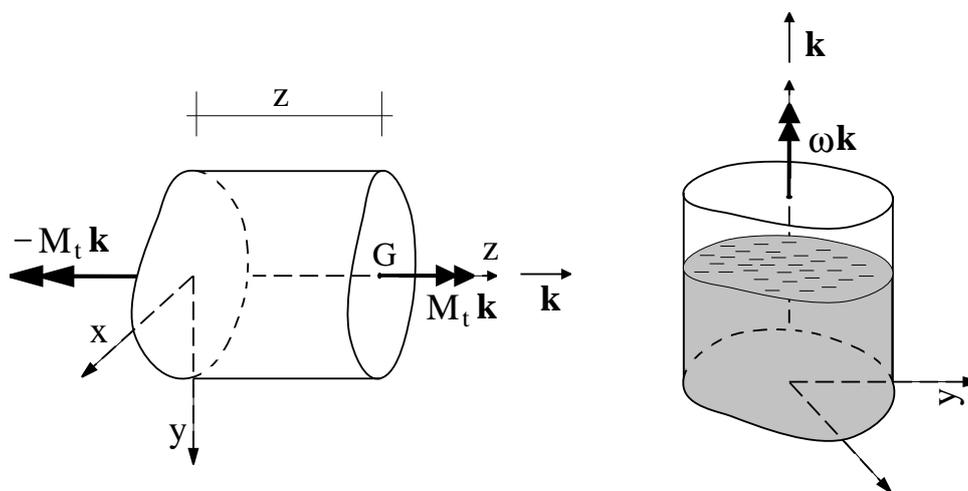


Figura 3.49: Analogia idrodinamica.

Le linee di flusso del campo delle τ_z devono dunque essere le stesse delle linee di flusso seguite dalle particelle di liquido sulla sezione del recipiente (figura 3.50).

Di seguito si analizzeranno solo, in modo approssimato, i casi delle sezioni sottili biconnesse.

3.4.3 Sezione sottile biconnessa

Una sezione retta si dice 'sottile' quando l'area è concentrata in prossimità di una linea del piano della sezione, detta 'linea media' della sezione (figura 3.51). Si ha una sezione

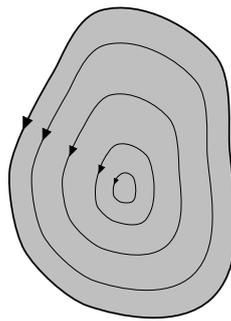


Figura 3.50: Linee di flusso delle tensioni tangenziali.

sottile biconnessa quando la linea media definisce una curva biconnessa del piano. Si consideri allora il caso della generica sezione sottile biconnessa di figura 3.52.

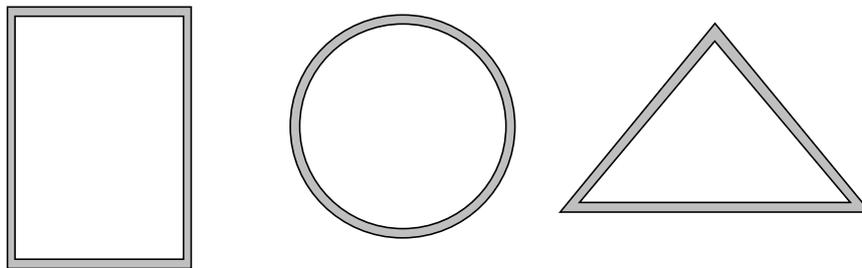


Figura 3.51: Esempi di sezione sottile biconnessa.

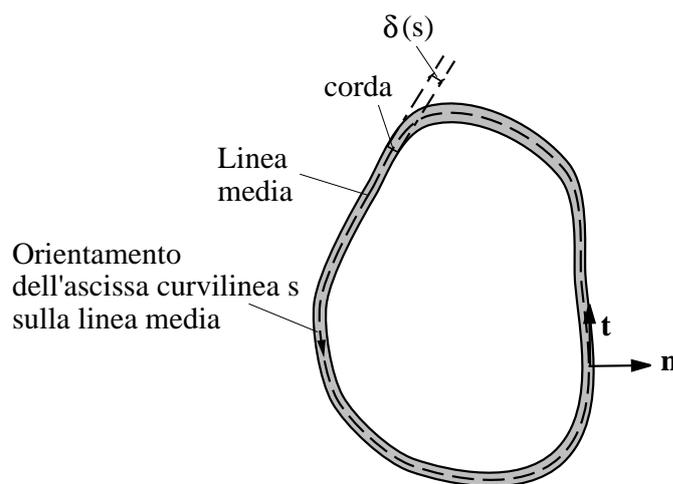


Figura 3.52: Sezione biconnessa.

Si consideri un'ascissa curvilinea s lungo la linea media. Il segmento ortogonale alla linea media avente come due estremi i due punti più vicini del contorno della sezione è detto una 'corda' della sezione ed è intersecato dalla linea media nel proprio punto medio. La sua lunghezza è detta 'spessore' della linea media ed indicata con δ . Lo spessore in generale può variare lungo la linea media ed è quindi in generale funzione dell'ascissa s . Detta L la lunghezza della linea media, per ipotesi $\delta(s) \ll L$ in ogni punto.

Variazione della tensione tangenziale sulla corda

Si consideri ora il riferimento con origine nel centro della generica corda all'ascissa s , e con assi paralleli alla base $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}\}$ indicata in figura 3.52 e definita dai vettori rispettivamente normale e tangente alla linea media, con \mathbf{t} ottenuto ruotando \mathbf{n} di $\pi/2$ in senso antiorario. Si indichino inoltre con n e s le coordinate di un punto e con τ_{zn} e τ_{zs} le due componenti di τ_z rispetto a tale riferimento. La (3.192)₂ fornisce:

$$\text{rot } \tau_z = \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial n} + \frac{\partial \tau_{zn}}{\partial s} = 2 G \theta' \quad (3.194)$$

Nei due punti di intersezione della generica corda con il contorno della sezione la τ_z deve essere tangente al contorno stesso e quindi, assumendo che l'eventuale variazione di δ sia estremamente graduale¹⁰, si può porre $\tau_{zn} = 0$ in tali punti. Per la piccolezza dello spessore si può poi estendere l'ipotesi $\tau_{zn} = 0$ all'intera corda, e questo per ogni corda. Con tale ragionamento si ritiene lecito assumere nullo il termine $\partial \tau_{zn} / \partial s$ nella (3.194) ed ottenere la seguente variazione lineare dell'unica componente rimasta, ovvero quella τ_{zs} in direzione della tangente alla linea media (figura 3.53):

$$\frac{\partial \tau_{zs}}{\partial n} = 2 G \theta' \quad \Rightarrow \quad \tau_{zs} = 2 G \theta' n + c \quad (3.195)$$

La costante c rappresenta chiaramente il valore assunto dalla τ_{zs} al centro della corda, per $n = 0$, ed è anche uguale al valore medio della τ_{zs} sulla corda:

$$\tau_{zs} = 2 G \theta' n + \tau_{zs,med} \quad (3.196)$$

D'altra parte, in virtù dell'analogia idrodinamica e della piccolezza dello spessore, le linee di flusso in una sezione biconnessa si possono supporre con buona approssimazione parallele alla linea media, e sembra lecito assumere che la variazione della τ_{zs} sia estremamente limitata. Evidentemente il valore medio $\tau_{zs,med}$ è nettamente predominante rispetto alla variazione lineare massima sulla corda pari a $G \theta' \delta$, ed appare lecito porre costantemente sulla corda $\tau_z = \tau_{zs,med} = \tau_z(s)$.

In termini vettoriali, la τ_z è diretta secondo la tangente \mathbf{t} alla linea media per cui si ha:

$$\tau_z = \tau_z \mathbf{t} \quad (3.197)$$

Poiché poi nel caso idrodinamico deve essere costante la portata lungo ogni corda della linea media, nel caso della torsione si avrà la seguente legge di 'costanza del flusso':

$$\tau_z(s) \delta(s) = q = \text{costante} \quad (3.198)$$

Pertanto, mentre in generale τ_z e δ possono variare con s , cioè lungo la linea media, il loro prodotto, detto 'flusso' ed indicato con q , non varia e quindi non è funzione di s .

¹⁰Nelle applicazioni lo spessore δ è tipicamente costante o costante a tratti.

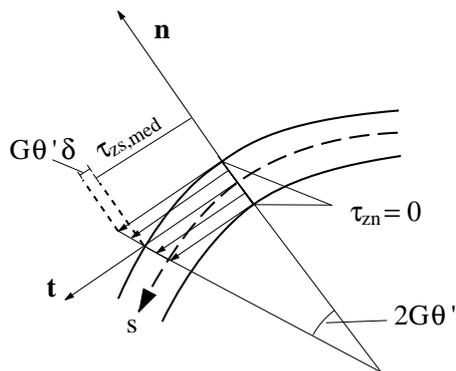


Figura 3.53: Variazione della tensione tangenziale sulla corda.

Formule di Bredt

Si consideri la linea media di una sezione sottile biconnessa, riportata in figura 3.54, e si orienti la linea media in senso antiorario. Si indicherà con A_m l'area racchiusa dalla linea media. Sia inoltre \mathbf{n} il versore uscente da A_m in modo che il versore tangente \mathbf{t} è diretto secondo il verso positivo della linea media.

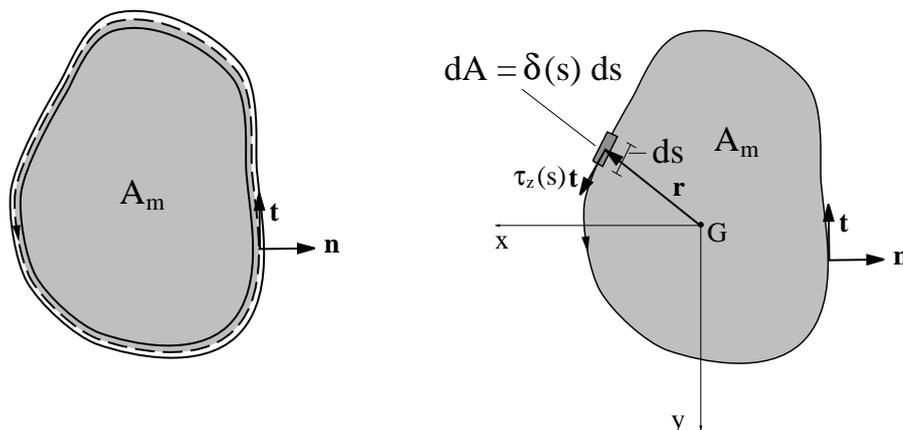


Figura 3.54: Derivazione delle formule di Bredt.

Integrando il valore della τ_z su una porzione elementare di area pari a $dA = \delta(s) ds$ si ottiene un vettore forza

$$d\mathbf{F} = \tau_z(s) \mathbf{t} \delta(s) ds = q \mathbf{t} ds \tag{3.199}$$

Il momento elementare dM_t , rispetto all'origine G , fornito dalla forza $d\mathbf{F}$ è dato da:

$$d\mathbf{M}_t = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \mathbf{r} \times q \mathbf{t} ds \tag{3.200}$$

ed è chiaramente parallelo all'asse z in quanto sia \mathbf{r} che $d\mathbf{F}$ sono vettori del piano della sezione.

Il momento torcente si ottiene integrando la (3.200) lungo la linea media e moltiplicando scalarmente per \mathbf{k} :

$$M_t = \oint_{\partial A_m} [(\mathbf{r} \times q \mathbf{t}) \cdot \mathbf{k}] ds \quad (3.201)$$

Portando q fuori dall'integrale in quanto costante per la (3.198), ed applicando la permutazione nel prodotto misto per la quale si ha che $(\mathbf{r} \times \mathbf{t}) \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{t} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}$ si ottiene:

$$M_t = q \oint_{\partial A_m} [(\mathbf{t} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}] ds \quad (3.202)$$

Si ha inoltre:

$$\mathbf{t} \times \mathbf{k} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{n} \quad (3.203)$$

da cui, applicando il teorema della divergenza, si ricava:

$$M_t = q \oint_{\partial A_m} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds = q \int_{A_m} \text{div } \mathbf{r} ds = 2 q A_m \quad (3.204)$$

Si ha infatti:

$$\text{div } \mathbf{r} = \text{div} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2 \quad (3.205)$$

Dalla (3.204) si ottiene la 'prima formula di Bredt':

$$q = \frac{M_t}{2 A_m} \quad (3.206)$$

che, tenendo conto della espressione (3.198) del flusso, può anche essere riscritta direttamente in termini di τ_z :

$$\tau_z(s) = \frac{M_t}{2 A_m \delta(s)} \quad (3.207)$$

Seconda formula di Bredt

Per il teorema di Stokes, la circuitazione del vettore $\boldsymbol{\tau}_z$ può calcolarsi come integrale del rotore di $\boldsymbol{\tau}_z$ esteso all'area racchiusa dalla linea media, A_m . Tale circuitazione, per definizione, è data dall'integrale su ∂A_m del prodotto scalare $\boldsymbol{\tau}_z \cdot \mathbf{t} = \tau_{zs} = \tau_z$. Inoltre, il rotore della $\boldsymbol{\tau}$ è costante e pari a $2 G \theta'$, per cui si ottiene:

$$\oint_{\partial A_m} \tau_z(s) ds = \int_{A_m} \text{rot } \boldsymbol{\tau}_z dA = \int_{A_m} 2 G \theta' dA = 2 G \theta' \int_{A_m} dA = 2 G \theta' A_m \quad (3.208)$$

Sostituendo nel primo membro della relazione precedente l'espressione di τ_z fornita dalla prima formula di Bredt, ovvero la (3.207), si ottiene:

$$\oint_{\partial A_m} \tau_z(s) ds = \oint_{\partial A_m} \frac{M_t}{2 A_m \delta(s)} ds = \frac{M_t}{2 A_m} \oint_{\partial A_m} \frac{1}{\delta(s)} ds \quad (3.209)$$

Confrontando tale relazione con la (3.208) si ottiene:

$$2 G \theta' A_m = \frac{M_t}{2 A_m} \oint_{\partial A_m} \frac{ds}{\delta(s)} \quad (3.210)$$

da cui l'espressione della 'rigidezza torsionale' della sezione biconnessa sottile:

$$C_t = \frac{M_t}{\theta'} = \frac{4 G A_m^2}{\oint_{\partial A_m} \frac{ds}{\delta(s)}} \quad (3.211)$$

nota come 'seconda formula di Bredt'.

3.5 Taglio

Si ha sollecitazione di taglio quando le risultanti sulle due basi della trave sono due forze uguali ed opposte parallele alle basi stesse. Per l'equilibrio alla rotazione, vi dovranno anche essere una o due coppie agenti sulle basi per cui la sollecitazione di taglio è sempre anche accompagnata da quella di flessione, in tutte le sezioni rette della trave tranne al più una. Nel caso di figura 3.55 si è considerata una coppia flettente agente sulla base di sinistra.

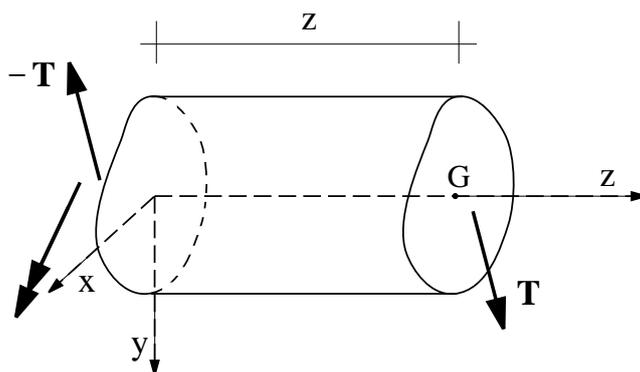


Figura 3.55: Sollecitazione di taglio.

La soluzione esatta del problema per questo tipo di sollecitazione è piuttosto complessa, per cui si prenderà in esame una trattazione approssimata, sviluppata all'ingegnere russo Jourawski nella seconda metà dell'800, che è molto utilizzata nelle applicazioni ingegneristiche. Essa si basa solamente su considerazioni di equilibrio.

3.5.1 Trattazione di Jourawski

Si consideri la generica sezione retta riportata in figura 3.56 ed un segmento \overline{AB} , detto anche corda, che la divida in due parti complementari A^* ed A^{**} . Il flusso del campo delle τ_z uscente da A^* è definito come:

$$\oint_{\partial A^*} \tau_z \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\partial A^*_{cont}} \tau_z \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{\overline{AB}} \tau_z \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3.212)$$

dove si è decomposto il contorno di ∂A^* nell'unione di quello coincidente con parte del contorno della sezione, indicato con ∂A^*_{cont} , e della corda \overline{AB} , e dove \mathbf{n} indica la normale uscente.

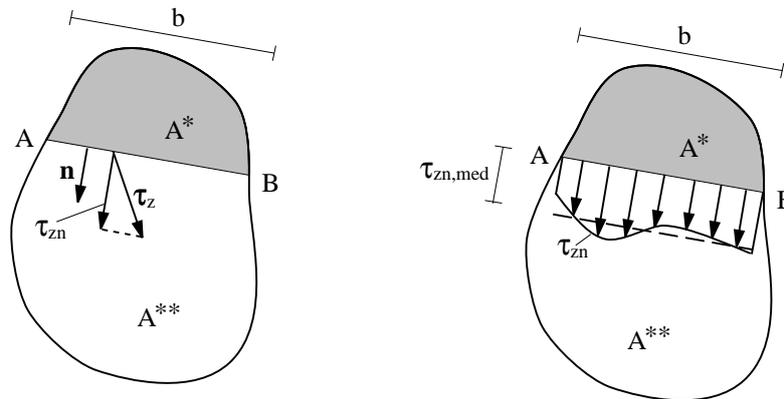


Figura 3.56: Flusso uscente da A^* .

Il primo termine a secondo membro della (3.212) è nullo in quanto le tensioni tangenziali sono tangenti al contorno (equazione (3.20)). pertanto, indicando con $\tau_{zn} = \tau_z \cdot \mathbf{n}$ la componente di τ_z normale alla corda, e con $\tau_{zn,med}$ il suo valore medio sulla corda, la (3.213) fornisce:

$$\oint_{\partial A^*} \tau_z \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\overline{AB}} \tau_{zn} \, ds = \tau_{zn,med} b \quad (3.213)$$

dove b indica la lunghezza della corda \overline{AB} .

D'altra parte, nel caso del taglio sono presenti in generale tutte e tre le componenti σ_z , τ_{zx} e τ_{zy} . Si è visto dunque nella (3.17) che la terza equazione differenziale di equilibrio fornisce la relazione:

$$\operatorname{div} \tau_z = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad (3.214)$$

Applicando allora il teorema della divergenza all'area A^* , si ottiene:

$$\oint_{\partial A^*} \tau_z \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{A^*} \operatorname{div} \tau_z \, dA = - \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \, dA \quad (3.215)$$

Conviene utilizzare l'espressione della σ_z fornita dalla formula monomia della flessione deviata, ovvero la (3.156), assumendo x coincidente con l'asse neutro della flessione associata al taglio:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_{Gy}} y \quad (3.216)$$

dalla quale si ottiene:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{M_x}{J_{Gy}} y \right) = \frac{y}{J_{Gy}} \frac{dM_x}{dz} \quad (3.217)$$

in quanto sia J_{Gy} che y non dipendono da z . Si verifica poi facilmente che la derivata del momento M_x rispetto a z è pari alla componente T_y del taglio:

$$\frac{dM_x}{dz} = T_y \quad (3.218)$$

La (3.218) infatti è la ben nota relazione che lega la derivata del momento al taglio, scritta però qui nel caso spaziale e con riferimento al piano yz . Così come fatto nel capitolo delle travature piane, essa si ricava imponendo l'equilibrio alla rotazione del concio elementare di trave intorno all'asse x .

Combinando le relazioni (3.215)-(3.218) si ottiene:

$$\oint_{\partial A^*} \boldsymbol{\tau}_z \cdot \mathbf{n} \, ds = -\frac{T_y}{J_{Gy}} \int_{A^*} y \, dA = -\frac{T_y S_y^*}{J_{Gy}} \quad (3.219)$$

dove S_y^* rappresenta il momento statico dell'area A^* lungo y .

Confrontando la relazione precedente con la (3.213) si ottiene la relazione:

$$\tau_{zn,med} = -\frac{T_y S_y^*}{J_{Gy} b} \quad (3.220)$$

Questa relazione è esatta in quanto non si è fatta alcuna approssimazione fino a questo punto. Essa però fornisce il valore medio della τ_{zn} lungo la corda ma non il valore puntuale, che in generale sarà variabile lungo la corda stessa. L'approssimazione che viene allora fatta nella maggioranza delle applicazioni è quella di ritenere, laddove lo si ritenga accettabile con la precisione richiesta nel calcolo, che la τ_{zn} risulti costante lungo la corda. In tal modo si può sostituire il valore medio $\tau_{zn,med}$ con quello puntuale τ_{zn} nella (3.220) ed ottenere dunque la seguente relazione, nota come 'formula di Jourawski':

$$\tau_{zn} = -\frac{T_y S_y^*}{J_{Gy} b} \quad (3.221)$$

Come si è detto, la formula di Jourawski è basata su sole considerazioni di equilibrio. In particolare, la trattazione svolta equivale alla scrittura delle condizioni di equilibrio per l'elemento longitudinale di area A^* e lunghezza dz riportato tridimensionalmente in figura 3.57.

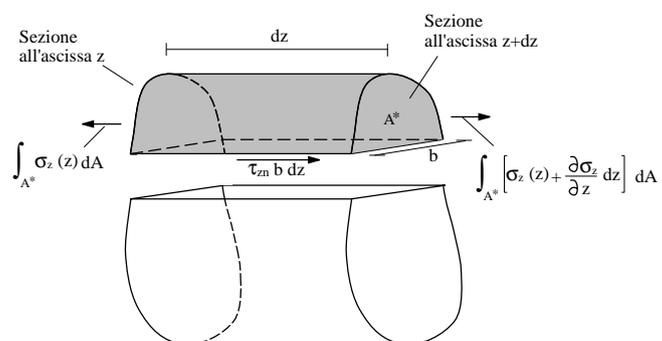


Figura 3.57: Equilibrio alla traslazione dell'elemento longitudinale di area A^* e lunghezza dz .