Funzioni di due variabili

Lezione di Peter Laurence

Definition 1. *Una funzione di due variabili è una regola che assegna a ciascuna coppia ordinata di numeri reali (x, y) i un certo insieme D (detto dominio della funzione) un unico numero reale indicato da $f(x, y)$. L'insieme dei valori assunti della funzione viene chiamato codominio della funzione.*

Esempio

Sia $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Determinare il dominio e il codominio della funzione f.

Soluzione

Il dominio della funzione è tutto $\Re^2$. I suo codominio è $\Re^+ \cup \{0\}$.

Trovare i domini delle seguente funzioni e calcolare $f(3, 2)$.

a)

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

b)

$$xln(y^2 - x)$$

Soluzione

Caso della funzione a)

Questa funzione è definita a condizione che valgono le seguente condizioni

- i) $x + y - 1 \geq 0$, e $x \neq 1$.

Disegno in aula.

La prima equazione garantisce che la radice quadrata al numeratore è definita. La seconda condizione garantisce che il denominatore sia diverso da 0.

Abbiamo

$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1}$$

Nel caso della seconda funzione dobbiamo garantire che

$$y^2 - x > 0,$$

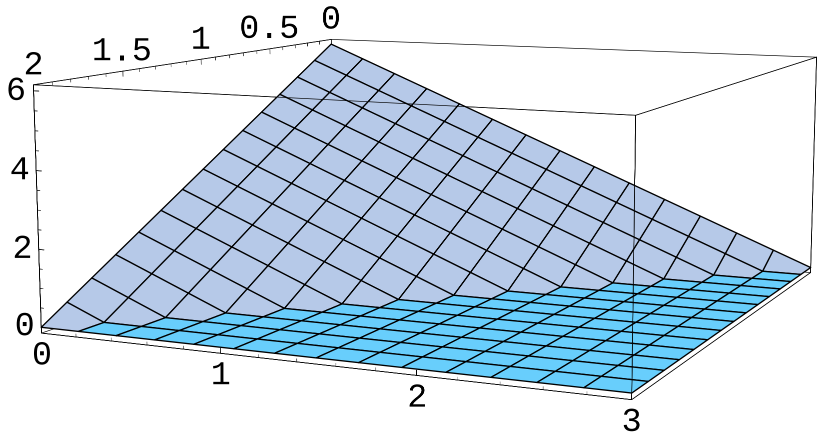
perche questo garantisce che

il logaritmo sia definito. Traciando il grafico della funzione $x = y^2$ (cioe prendendo come variabile indipendente la y al posto della x, si vede che si tratta della parte esterna di quella limitata per la parabola. Disegno in aula.

$$f(3,2) = 3ln(2^2 - 3) = 0$$

Grafici

Definition 2. *Se f è una funzione di due variabili definita su D, il grafico di f è l'insieme dei punti (x, y, z) di $\Re^3$ tali che $z = f(x, y, z)$ e (x, y) appartiene a D.*



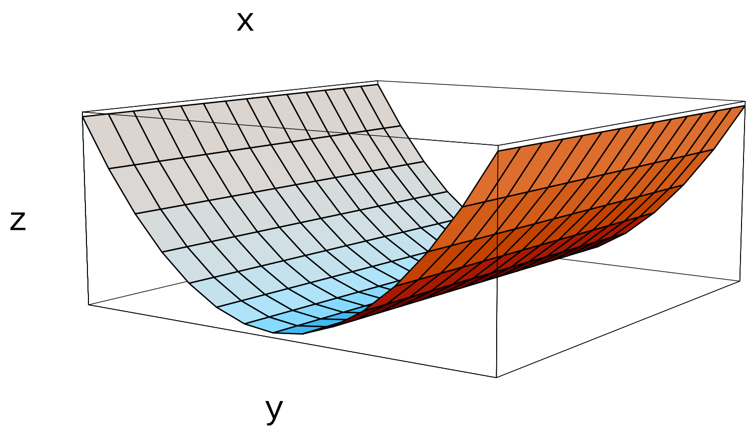
Piu in generale una funzione della forma

$$f(x, y) = ax + by + c$$

si chiama funzione lineare di x e y.

Esempio

Traciare il grafico della funzione $f(x, y) = y^2$.



Una funzione di piu variabili $f(x)$ con $f : \Re^n \to \Re$ associa a $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un unico valore

Un esempio importante in economia che viene riportato nei giornali ̀l'indice del costo della vita. I prezzi p_i di certe commodità chiavi vengono seguiti ogni mese. Un peso w_i viene assegnato ad ogni commodità e l'indice del costo della vita è allora dato da la media ponderata:

$$C = f(p_1, p_2, .., p_n) = w_1 p_1 + w_2 p_2 + \cdots w_n p_n$$

la funzione cosi definita è una funzione lineare dei prezzi $p_i, i = 1, \cdots, n$

Definition 3. *Sia* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \Re^n$. *La palla aperta intorno a* **a** *con raggio* δ *, indicata da* $B(a, \delta)$ *è data da*

$$B(a, \delta) = \{x \in \Re^n \mid d(x, a) < \delta\}$$

dove

$$d(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$$

è la distanza tra x *e* a *in* $\Re^n$. *La palla chiusa* $\bar{B}(\mathbf{a}, \delta)$.

Il concetto di limite per funzioni di piu variabili

Sia $f : \Re^n \to \Re$. Si dice che

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una δ tale che risulti

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

quando

$$0 < |x - a| < \epsilon$$

Afinche questa definizione abbia un senso è sufficiente che f sia definita in un intorno punturato $B(a, \delta) \setminus \{a\}$ di raggio δ intorno al punto a. La definizione allora dice che per ogni $\epsilon > 0$ si ha che $f(x)$ appartiene all 'intervallo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ quando x appartiene alla palla punturata $B(a, \delta) \setminus \{a\}$. Un aspetto importante di questa definizione è che deve valere indipendentemente di quale sia la direzione nella quale il punto x si avicina del punto a.

Esempio 1

Sia f definita da

$$f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

che è definita in tutto $\Re^2$ salvo nel punto $(0, 0)$, decidere se esiste il limite di f per $x \to 0$.

Soluzione

Per $x \neq (0,0)$ abbiamo

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = x^2 - y^2$$

E quindi per $(x,y) \to (0,0)$ si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 - y^2 = 0$$

Esempio 2

Per la funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

decidere se la funzione ha un limite nel punto $(0,0)$.

Se $y = 0$ e faciamo tendere x a 0 abbiamo

$$\lim_{x\to 0, y=0} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y=0} \frac{0}{x^2} = 0$$

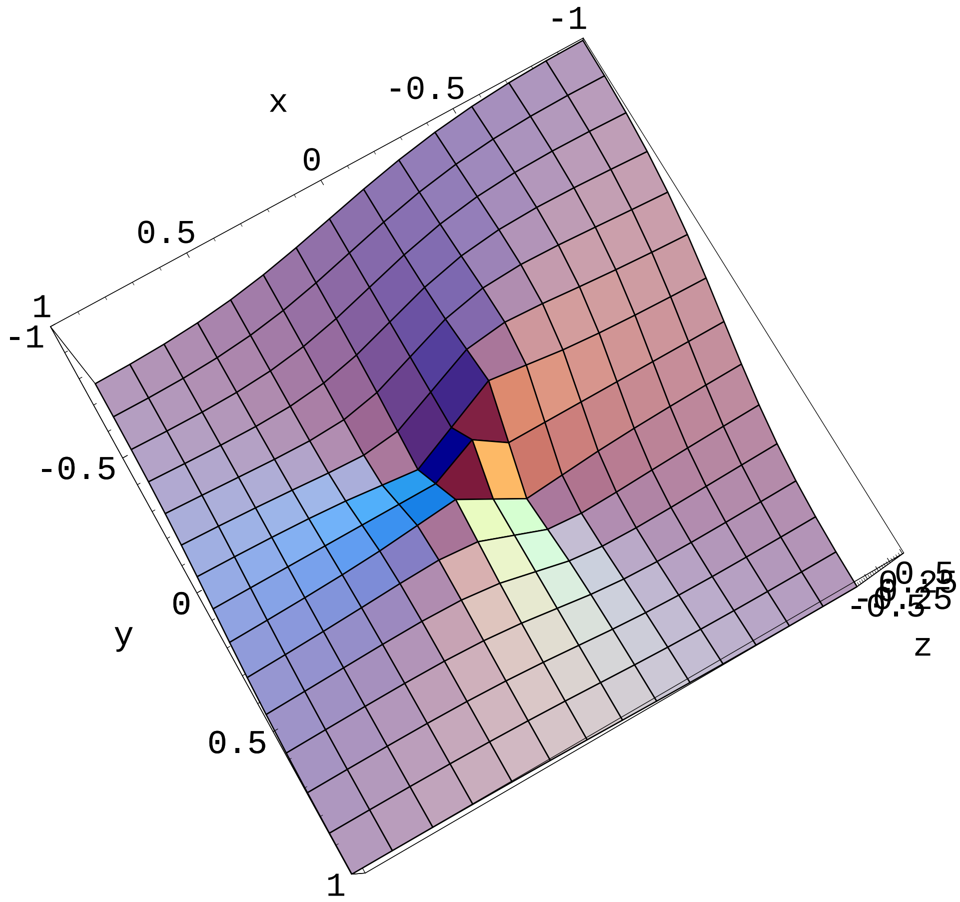
Nello stesso modo se $x = 0$ e facciamo tendere y a 0 si ha che

$$\lim_{y\to 0, x=0} f(x,y) = \lim_{y\to 0, x=0} \frac{0}{y^2} = 0$$

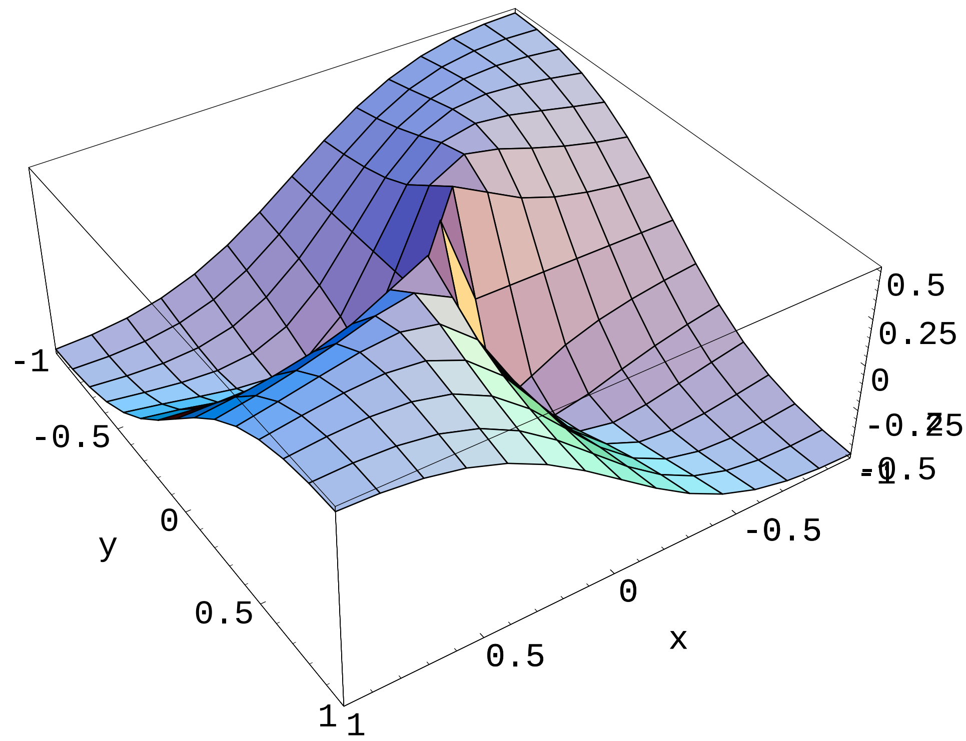
Per se prendiamo $x = y$ e facciamo tendere entrambi a zero abbiamo

$$\lim_{x=y, x,y\to 0} f(x,y) = \lim_{x=y, x,y\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

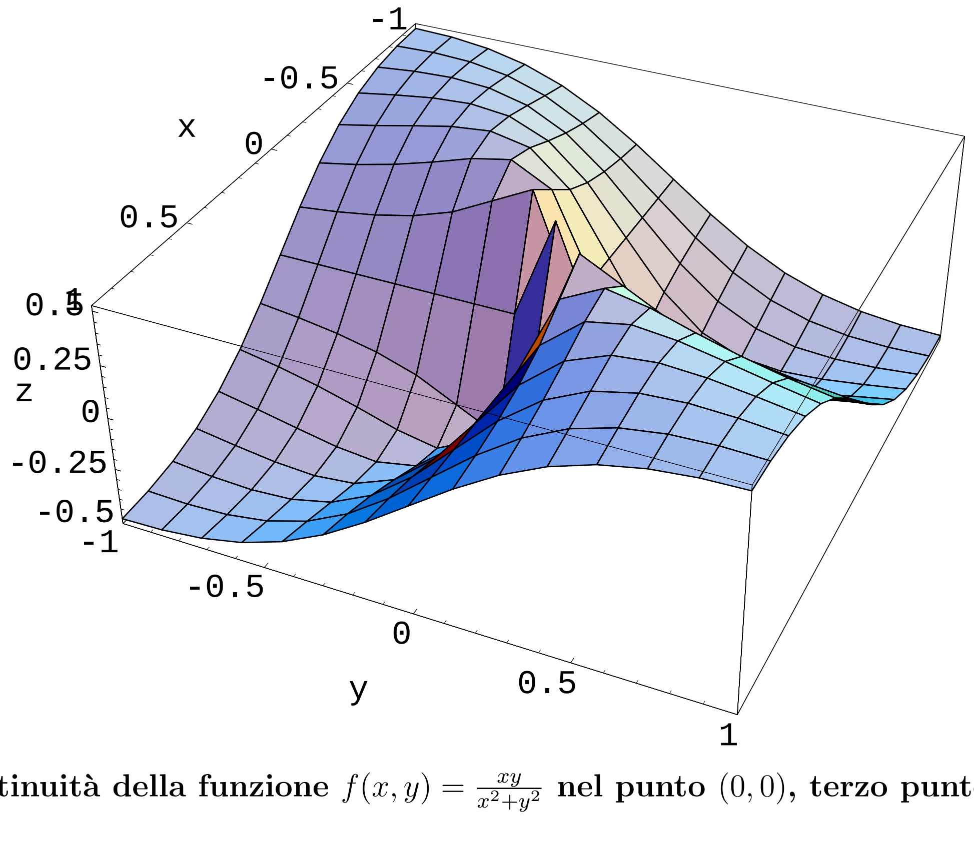
e dunque facendo tendere (x,y) a zero in quest' altra direzione, si ottiene il limite $\frac{1}{2}$ che è diverso di quello precedente Dunque la funzione $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, **non ha un limite** nel punto $(0,0)$. Vedere le illustrazioni:



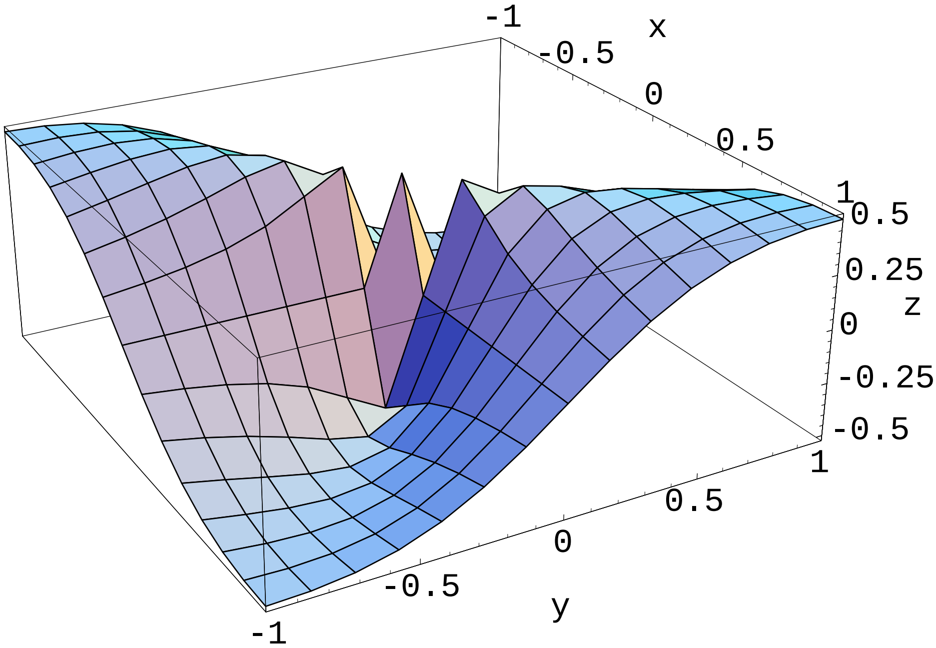
La discontinuità della funzione $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ nel punto $(0,0)$, primo punto di vista



La discontinuità della funzione $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ nel punto $(0,0)$, secondo punto di vista



La discontinuità della funzione $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ nel punto $(0,0)$, terzo punto di vista



La discontinuità della funzione $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ nel punto $(0,0)$, quarto punto di vista

Esercizi Per le seguenti funzioni decidere se hanno un limite nel punto indicato.

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} ln\left(\frac{x^2-y^2}{x-y}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{ln(xy)}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$$

- $$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$$

Trovare il limite per $(x,y)\to(0,0)$ per le seguenti funzioni

- $$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

- $$\frac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$$

-

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$$

Poi ci sono delle funzioni noiose (e anche "rognose") che hanno la proprietà che nonostante che tutti i limiti per $(x, y) \to (0, 0)$ coincidono per tutte le rette che passono per l'origine, il limite non esiste.

Esempio

a)

$$\frac{x^4 y^4}{(x^2+y^4)^3}$$

b)

$$\frac{x^2}{x^2+y^2-x}$$

c)

$$\frac{y(x^2+y^2)}{y^2+(x^2+y^2)^2}$$

$$f(x, y) = \frac{y(x^2+y^2)}{y^2+(x^2+y^2)}$$

Prendiamo per esempio la a)

Se $y = ax$ per qualunque $t \in \Re$, il limite esiste ed è uguale a zero. Infatti

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to 0, y=ax} f(x, y) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{a^4 x^8}{(x^2+a^4x^4)^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{a^4 x^2}{(1+a^4x^2)^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pero il limite non esiste. Infatti, passiamo al reciproco:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x^2+y^4)^3}{x^4y^4}\\
&=\frac{x^6+3x^4y^4+3x^2y^8+y^{12}}{x^4y^4}\\
&=\frac{x^6}{x^4y^4}+\frac{3x^4y^4}{x^4y^4}+3\frac{x^2y^8}{x^4y^4}+\frac{y^{12}}{x^4y^4}\\
&=\frac{x^2}{y^4}+3+3\frac{y^4}{x^2}+\frac{y^8}{x^4}
\end{aligned}
$$

Se facessimo la scelta $y=\sqrt{x}$, avremo

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0),y=\sqrt{x}}\frac{1}{f(x,y)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}+3+3\frac{x^2}{x^2}+\frac{x^4}{x^4}\\
=8
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\lim_{x\to 0,y=\sqrt{x}}f(x,y)=\frac{1}{8}
$$

Per la b), abbiamo gia visto a lezione, che per $y=ax$ il limite viene 0.

Pero il limite non è zero. Sta' volta, passando al reciproco ci da

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^2+y^2-x}{x^2}\\
&=1+\frac{y^2}{x^2}-\frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

L'ultimo pezzo tende a $+\infty$ per $x\to 0^+$ e a $-\infty$ per $x\to 0^-$. Pero $\frac{y^2}{x^2}$ potrebbe tendere tendere anche all'infinito oppure non avere limite.

Possiamo invece procedere cosi: facendo, come nell'esercizio a) vedere una curva lungo la quale il limite non è infinito.

Prendiamo per questa fine la curva

$$
(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}
$$

Questo è un cerchio che passa per l'origine, con raggio 1/2 e col centro $(\frac{1}{2},0)$. Su questa curva abbiamo sempre

$$
x^2+y^2-x=0
$$

Quindi la funzione vale $+\infty$ su questa curva!

Esercizio

$$f(x) = \frac{y(x^2 + y^2)}{y^2 + (x^2 + y^2)^2}$$

- Decidere se il limite esiste per $(x, y) \to (0, 0)$ e decidere quanto vale.

- $$\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2},$$
$$\frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2},$$
$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4 + y^4},$$
$$\frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3},$$
$$x^y,$$
$$x^{\frac{1}{|y|}},$$
$$\frac{e^{-|x-y|}}{(x^2 - 2xy + y^2)}$$