FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Esercizio 1: Stabilire se esiste ed eventualmente calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, dove

$$f(x,y) = \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Esercizio 2: Stabilire se esiste ed eventualmente calcolare $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$, dove

$$f(x,y) = \frac{xy^2 - 2xy - y^2 + 2y + x - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}, \qquad \forall (x,y) \neq (1,1).$$

Esercizio 3: Stabilire se è continua in $(0,0)$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio 4: Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y+2x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stabilire se:

(i) f è continua in $(0,0)$;
(ii) f ammette le due derivate parziali in $(0,0)$;
(iii) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$;
(vi) f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 5: Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stabilire se:

(i) f è continua in $\mathbb{R}^2$;
(ii) f ammette le due derivate parziali in $\mathbb{R}^2$;
(iii) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$;
(vi) f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Soluzioni

Esercizio 1: Si noti che per ogni $x \neq 0$, $f(x,x) = \sqrt{2}$, mentre per ogni $y \neq 0$, $f(0,y) = 1$. Pertanto

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \sqrt{2} \neq \lim_{y\to 0} f(0,y) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Esercizio 2: Posta $\hat{f}(\rho,\vartheta) = f(1+\rho\cos\vartheta, 1+\rho\sin\vartheta)$, per $\rho \neq 0$ si ha

$$|\hat{f}(\rho,\vartheta)| = \left|\frac{\rho^3}{\rho}\cos\vartheta\sin^2\vartheta\right| \leq \rho^2 \to 0 \quad \text{quando } \rho \to 0, \text{ uniformemente in } \vartheta.$$

Ne concludiamo che $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 0$.

Esercizio 3: Posta $\hat{f}(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$, per $\rho \neq 0$ si ha

$$|\hat{f}(\rho,\vartheta)| = \left|\frac{\rho^2}{\rho}(\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta + \sin^2\vartheta)\right| \leq 2\rho \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0, \text{ uniform. in } \vartheta.$$

Ne segue che, siccome $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, la funzione f è continua in $(0,0)$.

Esercizio 4: (i) Posta $\hat{f}(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$, per $\rho \neq 0$ si ha

$$|\hat{f}(\rho,\vartheta)| = \left|\frac{\rho^4}{\rho^3}(\cos^3\vartheta\sin\vartheta + 2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta)\right| \leq 3\rho \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0, \text{ uniform. in } \vartheta.$$

Ne segue che, siccome $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, la funzione f è continua in $(0,0)$; (ii) Facilmente si vede che $f(0,y) = f(x,0) = 0$, pertanto $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; (iii) Fissata una generica direzione $\lambda = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$,

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta)}{t} = \cos^3\vartheta\sin\vartheta + 2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial\lambda}(0,0) = \cos^3\vartheta\sin\vartheta + 2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta. \end{aligned}$$

(iv) La funzione f non può essere differenziabile in $(0,0)$. Infatti, se lo fosse, il Teorema sulle derivate direzionali di una funzione differenziabile assicurerebbe che, fissata una generica direzione $\lambda = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$,

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\sin\vartheta = 0$$

per il punto (ii), mentre da (iii) sappiamo che non è così: per esempio, se $\vartheta = \pi/4$ $\frac{\partial f}{\partial\lambda}(0,0) = 3/4$.

Esercizio 5: (i) Osserviamo che f è continua in ogni $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, in quanto composizione di funzioni continue. In $(0,0)$ dobbiamo verificare direttamente la continuità. Posta $\hat{f}(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$, per $\rho \neq 0$ si ha

$$|\hat{f}(\rho,\vartheta)| = \left|\frac{\rho^3}{\rho^2}(\cos^3\vartheta + \sin^3\vartheta)\right| \leq 2\rho \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0, \text{ uniform. in } \vartheta.$$

Ne segue che f è continua anche in $(0,0)$, quindi $f \in C(\mathbb{R}^2)$; (ii) Per ogni $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ possiamo calcolare direttamente le derivate parziali

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{2x_0^4 + 3x_0^2y_0^2 - x_0y_0^3}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) &= \frac{2y_0^4 + 3x_0^2y_0^2 - x_0^3y_0}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Si noti poi che $f(x,0) = f(0,y) = 0$ per ogni $x \neq 0$, $y \neq 0$ assicura $\nabla f(0,0) = (0,0)$; (iii) Conviene rispondere a questo punto dopo la (iv); (iv) Se verifichiamo che $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2)$, il Teorema del Differenziale permette di concludere che f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Osserviamo che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in ogni $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ perché composizioni di funzioni continue.

Mostriamo che c'è continuità anche in $(0,0)$. Passando alle cooordinate polari, essendo

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial\hat{f}}{\partial x}(\rho,\vartheta)\Big| &= \Big|\frac{\rho^4}{\rho^3}(2\cos^4\vartheta + 3\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta - \cos\vartheta\sin^3\vartheta)\Big| \leq 6\rho \\
\Big|\frac{\partial\hat{f}}{\partial y}(\rho,\vartheta)\Big| &= \Big|\frac{\rho^4}{\rho^3}(2\sin^4\vartheta + 3\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta - \sin\vartheta\cos^3\vartheta)\Big| \leq 6\rho,
\end{aligned}$$

si deduce che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue anche in $(0,0)$. Nota la differenziabilità di f, le derivate parziali in $(0,0)$ sono tutte nulle per il Teorema sulle derivate direzionali di una funzione differenziabile e (ii).